➤ Activité d'introduction : livre p. 204.

Objectifs :

L'objectif de cette activité est de montrer que dans un triangle rectangle ayant un angle aigu de mesure a, le rapport des longueurs $\frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{a}}{\text{hypoténuse}}$ est constant.

On appelle ce rapport cosinus de l'angle â.

1. De la conjecture…

a) Dans le triangle ABC : $\frac{AB}{BC} \approx \frac{2,8}{3,8} \approx 0,74$.

Dans le triangle DEF : $\frac{ED}{EF} \approx \frac{2,4}{3,2} \approx 0,75$.

c) « Conjecture : d'après les questions précédentes, il semble que, dans un triangle rectangle ayant un angle aigu de mesure a, le rapport des longueurs $\frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{a}}{\text{hypothénuse}}$ est constant. »

2. … à la démonstration

a) On sait que les droites (MN) et (ST) sont perpendiculaires à (OS).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

Donc les droites(MN) et (ST) sont parallèles.

b) On sait que M appartient à [OS], N appartient à [OT] et les droites (MN) et (ST) sont parallèles.

D'après la propriété de Thalès, on a donc : $\frac{OM}{OS} = \frac{ON}{OT} = \frac{MN}{ST}$.

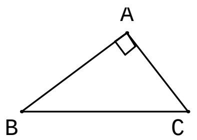
c) On a : $\frac{OM}{OS} = \frac{ON}{OT}$. En multipliant les deux membres de l'égalité par $\frac{OS}{ON}$, on obtient :

$\frac{OM}{ON} = \frac{OS}{OT}$

d) « Dans des triangles **rectangles** qui ont le même angle aigu $\hat{a}$, le rapport $\frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{a}}{\text{hypothénuse}}$ est **constant**. Ce quotient s'appelle le cosinus de l'angle $\hat{a}$ et se note cos $\hat{a}$. »

I- COSINUS D'UN ANGLE AIGU D'UN TRIANGLE RECTANGLE

1) Triangle rectangle



ABC est un triangle rectangle en A
[BC] est l'hypoténuse du triangle ABC

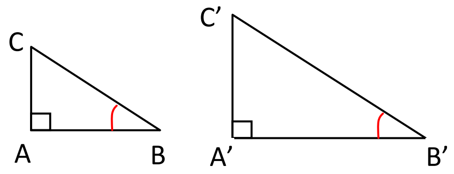
➧ ***Définition*** : le côté **adjacent** à un angle dans un triangle rectangle est le côté de l'angle qui n'est pas l'hypoténuse.

Dans le triangle ABC rectangle en A : le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est [AB]
le côté adjacent à $\widehat{ACB}$ est [AC]

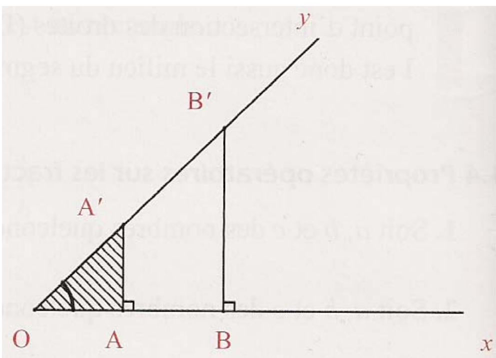
2) Cosinus

➧ ***Théorème*** *(admis)* : soit ABC et A'B'C' deux triangles rectangles respectivement en A et A'.

Si $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, alors $\frac{BA}{BC} = \frac{B'A'}{B'C'}$



➤ *Démonstration* :



→ ***Données*** :

- Soit $x\widehat{O}y$ un angle de mesure α.
- Soit A' et B' deux points de la demi-droite [Oy) distincts de O.
- Soit A le point d'intersection avec (Ox) de la perpendiculaire à (Ox) menée par A' et B le point d'intersection avec (Ox) de la perpendiculaire à (Ox) menée par B'.

→ ***Outils utilisés*** :

- Propriété 1 : théorème de Thalès.
- Propriété 2 : soit a, b, c et d des nombres quelconques tels que b et d soient non nuls. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors axd = bxc et inversement.

→ ***Démonstration*** :

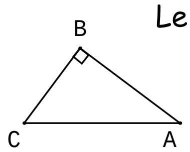
- Les droites (AA') et (BB') sont perpendiculaires à la droite (Ox). Elles sont donc parallèles entre elles.

- On peut appliquer le théorème de Thalès, donc : $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$.
- D'où OA x OB' = OB x OA' (propriété 2).
- On en déduit : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ (propriété 2).

Définition : dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle, par la longueur de l'hypoténuse :

$$\text{cosinus d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}.$$

Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en B donc : son hypoténuse est [AC]

le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ est [AB]

le côté adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ est [BC]

donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$ et $\cos \widehat{BCA} = \frac{BC}{AC}$

Remarque : dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de deux longueurs, donc de deux nombres positifs, par conséquent le cosinus d'un angle aigu est un nombre positif qui n'a pas d'unité. De plus, dans le triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc le cosinus d'un angle aigu est inférieur à 1.

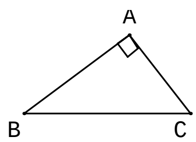
On note alors : $0 < \cos \widehat{BAC} < 1$

Propriété : dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est un nombre sans unité **compris entre 0 et 1**.

Comment calculer le cosinus d'un angle aigu ?

Le cosinus d'un angle aigu s'obtient de deux façons différentes :

1) En appliquant sa définition

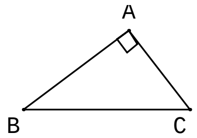


AB = 3cm $\quad \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

AC = 4cm $\quad \cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

BC = 5cm

2) En utilisant la valeur de l'angle



$\widehat{ABC} = 53{,}1°$ $\cos \widehat{ABC} = \cos 53{,}1 = 0{,}6$

$\widehat{BCA} = 36{,}9°$ $\cos \widehat{BCA} = \cos 36{,}9 = 0{,}8$

II- UTILISATION DE LA CALCULATRICE

Avant la généralisation des calculatrices scientifiques, on utilisé des « tables trigonométriques », afin d'obtenir le cosinus (ou le sinus et la tangente) d'un angle. Elles nous permettent aujourd'hui de voir d'un seul coup d'œil, comment ces rapports trigonométriques varient lorsque la valeur de l'angle augmente ou diminue.

TABLE TRIGONOMETRIQUE

Degrés	Cosinus	Sinus	Tangente		
0	1,000	0,000	0,000		90
1	1,000	0,017	0,017	57,29	89
2	0,999	0,035	0,035	28,63	88
3	0,999	0,052	0,052	19,08	87
4	0,998	0,070	0,070	14,30	86
5	0,996	0,087	0,087	11,43	85
6	0,995	0,105	0,105	9,514	84
7	0,993	0,122	0,123	8,144	83
8	0,990	0,139	0,141	7,115	82
9	0,988	0,156	0,158	6,314	81
10	0,985	0,174	0,176	5,671	80
11	0,982	0,191	0,194	5,145	79
12	0,978	0,208	0,213	4,705	78
13	0,974	0,225	0,231	4,331	77
14	0,970	0,242	0,249	4,011	76
15	0,966	0,259	0,268	3,732	75
16	0,961	0,276	0,287	3,487	74
17	0,956	0,292	0,306	3,271	73
18	0,951	0,309	0,325	3,078	72
19	0,946	0,326	0,344	2,904	71
20	0,940	0,342	0,364	2,747	70
21	0,934	0,358	0,384	2,605	69
22	0,927	0,375	0,404	2,475	68
23	0,921	0,391	0,424	2,356	67
24	0,914	0,407	0,445	2,246	66
25	0,906	0,423	0,466	2,145	65
26	0,899	0,438	0,488	2,050	64
27	0,891	0,454	0,510	1,963	63
28	0,883	0,469	0,532	1,881	62
29	0,875	0,485	0,554	1,804	61
30	0,866	0,500	0,577	1,732	60
31	0,857	0,515	0,601	1,664	59
32	0,848	0,530	0,625	1,600	58
33	0,839	0,545	0,649	1,540	57
34	0,829	0,559	0,675	1,483	56
35	0,819	0,574	0,700	1,428	55
36	0,809	0,588	0,727	1,376	54
37	0,799	0,602	0,754	1,327	53
38	0,788	0,616	0,781	1,280	52
39	0,777	0,629	0,810	1,235	51
40	0,766	0,643	0,839	1,192	50
41	0,755	0,656	0,869	1,150	49
42	0,743	0,669	0,900	1,111	48
43	0,731	0,682	0,933	1,072	47
44	0,719	0,695	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
	Sinus	Cosinus		Tangente	Degrés

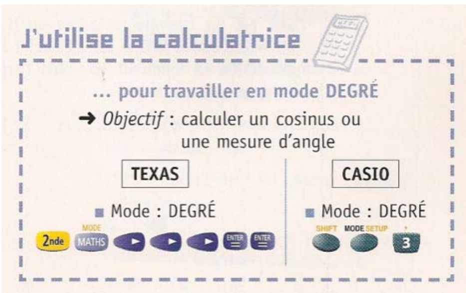
- ***Calcul du cosinus d'un angle à la calculatrice*** :
  - Travailler en mode « **DEGRÉ** ».
  - Utiliser la touche « **cos** », puis rentrer la valeur de l'angle en degrés.

- ***Calcul de la mesure d'un angle en degré à partir du cosinus de cet angle*** :
  - Travailler en mode « **DEGRÉ** ».
  - Sélectionner la fonction « inverse cosinus », pour cela appuyer sur la touche : « **Acs** » (« *Shift* » *et* « *cos* ») ou « **cos**$^{-1}$ » (« *seconde* » *et* « *cos* »).

- ***Exemples*** :
  - Calculer le cosinus de 12°. Arrondir au millième.

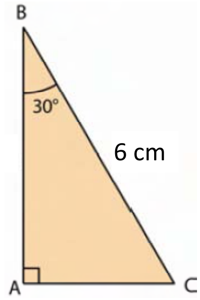
    cos 12° ≈ 0,978
  - Déterminer la mesure arrondie au degré de $\widehat{ABC}$ sachant que $\cos \widehat{ABC} = 0{,}8$.

    cos^{-1} 0,8 ≈ 37°



III- APPLICATIONS

1) Calculer une longueur

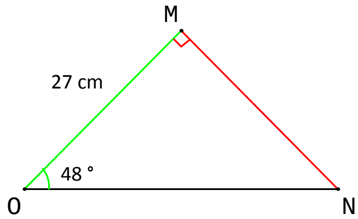


Problème : le triangle ABC est rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 30°$ et $BC = 6\ cm$.
Calculer AB (arrondir au dixième).

Je rédige de la façon suivante :

ABC est un triangle rectangle en A	← *j'écris la condition qui me permet d'utiliser la formule du cosinus.*
L'hypoténuse est : [BC]. Le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est : [AB].	← *je repère sur la figure l'hypoténuse et le côté adjacent à l'angle en question.*
$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{CB}$	← *j'écris la formule du cosinus avec les lettres.*
$\cos \widehat{30} = \frac{AB}{6}$	← *j'écris les données de l'énoncé dans la formule.*
$AB \times 1 = 6 \times \cos \widehat{30}$ $AB = 6 \times \cos \widehat{30}$	← *j'utilise l'égalité des produits en croix pour trouver AB.*
$AB \approx 5{,}2\ cm$	← *j'utilise la calculatrice pour obtenir la valeur approchée de AB.*

➤ ***Exemple :***



Le triangle MON est rectangle en M ;
$\widehat{MON}$ = 48° ; OM = 27 cm.
Quelle est la troncature au millimètre de la longueur ON ?

On sait que MON est rectangle en M et $\widehat{MON}$ = 48 ° et OM = 27 cm ;
On connaît la mesure de l'angle $\widehat{MON}$, donc on va utiliser le cosinus de cet angle.
L'hypoténuse du triangle est : [ON]
Le côté adjacent à l'angle $\widehat{MON}$ est : [OM]

Donc : $\cos \widehat{MON} = \frac{OM}{ON}$ et $\cos \widehat{MON} = \cos 48$

$\cos \widehat{MON} = \frac{27}{ON}$ on obtient donc l'égalité : $\cos 48 = \frac{27}{ON}$

on effectue le produit en croix : ON × cos 48 = 27 × 1

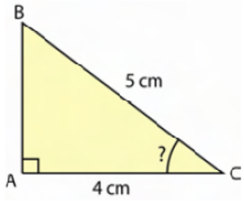
$ON = \frac{27}{\cos 48°}$

ON ≈ 40,3 cm

2) Calculer un angle

JE COMPRENDS LA METHODE

Je calcule la mesure de l'angle aigu $\widehat{ACB}$ d'un triangle rectangle (j'arrondis le résultat à l'unité)



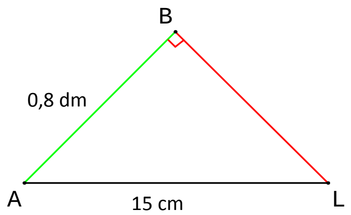
ABC est un triangle rectangle en A ← *J'écris l'hypothèse indispensable pour utiliser le cosinus*

$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$ ← *J'écris la formule du cosinus avec des lettres*

$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{4}{5}$ ← *Je remplace les expressions littérales par les données*

$\widehat{ACB} \approx 37°$ ← *J'utilise la calculatrice pour en déduire la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$.*

➤ ***Exemple*** :



BAL est un triangle rectangle en B.

AB = 0,8 dm et AL = 15 cm.

Quel est l'arrondi au degré de l'angle $\widehat{BAL}$?

On sait que BAL est rectangle en A.

L' hypoténuse du triangle est : [AL]

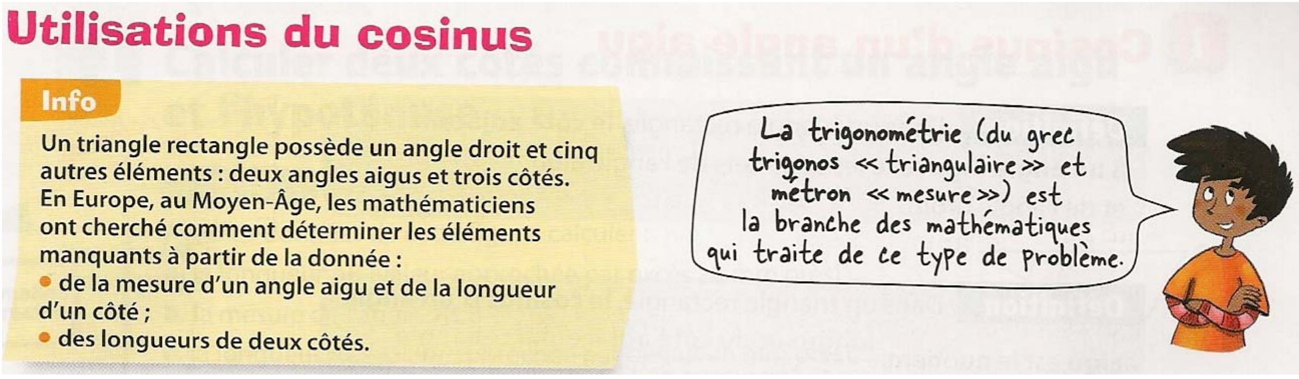
Le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAL}$ est : [BA]

→ $\cos \widehat{BAL} = \dfrac{AB}{AL}$

→ $\cos \widehat{BAL} = \dfrac{8}{15}$

→ on utilise la calculatrice : $\cos^{-1} \dfrac{8}{15}$

→ $\widehat{BAL} \approx 58°$



Utilisations du cosinus

Info

Un triangle rectangle possède un angle droit et cinq autres éléments : deux angles aigus et trois côtés.
En Europe, au Moyen-Âge, les mathématiciens ont cherché comment déterminer les éléments manquants à partir de la donnée :

- de la mesure d'un angle aigu et de la longueur d'un côté ;
- des longueurs de deux côtés.

Ethymologie

cosinus :

→ *co* : du latin *cum*, **avec**.

→ sinus : du sanscrit *jiva* (*jya*), **corde d'arc**, utilisé par le mathématicien indien Aryabhata (476-550) dans son ouvrage *Aryabhatiya* achevé en 499. Passé à l'arabe *jîba* (mot qui n'a pas de signification en arabe) par le mathématicien arabe Al-Fazzari (VIIème s.) puis par erreur à *jaîb*, poche, **repli de vêtement** lors de sa traduction en latin par Gérard de Crémone (1114-1187) qu'il traduit alors en latin par *sinus*, **pli**, **courbure** (qui a également donné le mot "sein").

C'est REGIOMONTANUS (Allemand, 1436-1476) qui utilisa au 15ème siècle le mot sinus au sens où on l'entend maintenant.