I- PUISSANCES D'UN NOMBRE

1. Notation a^n

L'addition répétée d'un même nombre a donné naissance à la multiplication : 2+2+2+2+2 = 5x2, cela simplifiant les écritures des calculs.
Ne peut-on pas simplifier l'écriture suivante : 2x2x2x2x2 = ?

➧ **Définition** : si a est un nombre relatif et si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors :

$$a^n = a \times a \times \ldots \times a \ \ (avec\ n\ facteurs\ égaux\ à\ a)$$

➤ ***Exemples*** :

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

On lit « 3 puissance 4 » ou « 3 exposant 4 ».

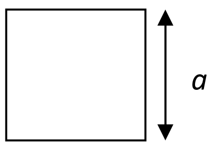
$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

On lit « –5 puissance 2 » ou « –5 exposant 2 »

Donc 2x2x2x2x2 peut s'écrire : 2^5

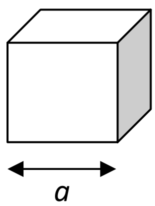
2. Carrés et cubes

➤ La puissance **d'exposant 2** d'un nombre s'appelle son **carré**. En effet, l'aire de ce carré ci-dessous, de coté *a*, est : $a \times a = a^2$.



Remarque : 14^2 se dit 14 au carré ; a^2 se dit a au carré…

➤ La puissance **d'exposant 3** d'un nombre s'appelle son **cube**. En effet, a^3 est le volume d'un cube de coté a.



Remarque : 14^3 se dit 14 au cube ; a^3 se dit a au cube…

3. Produit de deux puissances

➡ **Propriété** : pour calculer le produit de deux puissances d'un même nombre, il suffit de faire la somme des exposants.

➤ ***Exemples*** :

$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$ $\quad\quad$ $(-3)^4 \times (-3)^2 = (-3)^{4+2} = (-3)^6$

Preuve de : $2^2 \times 2^3 = 2^5$

$2^2 \times 2^3$ est le nombre obtenu en multipliant $\underbrace{2\times2}_{2\text{ facteurs}}$ par $\underbrace{2\times2\times2}_{3\text{ facteurs}}$.

C'est donc le produit de 2 + 3 facteurs égaux à 2.

C'est donc : 2^{2+3}.

4. Exposants 0 et 1.

➡ **Propriété** :

- Si a est un nombre relatif : $a^1 = a$.
- Si a est un nombre relatif non nul : $a^0 = 1$.

➤ ***Exemples*** :

$5^1 = 5$	$(-3)^1 = -3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$
$5^0 = 1$	$(-3)^0 = 1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

5. Exposant négatif.

➡ **Propriété** : si a est un nombre relatif non nul et n un entier positif : **a^n et a^{-n} sont inverses**. Autrement dit : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$et $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

➤ ***Exemples*** :

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\quad\quad$ $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$ $\quad\quad$ $\frac{1}{10^{-4}} = 10^4$

➤ *Cas particulier* : pour $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$, donc a^{-1} est une autre écriture de l'inverse de a.

6. Puissance d'un produit

Pour calculer la puissance d'un produit, il suffit de calculer **le produit des puissances**.

➢ ***Exemples*** :

$$\underbrace{(2\times 3)^4}_{\substack{\text{puissance}\\ \text{du produit}\\ \text{de 2 par 3}}} = \underbrace{2^4\times 3^4}_{\text{produit des deux puissances}} \qquad \underbrace{(4\times 2)^{-1}}_{\substack{\text{puissance}\\ \text{du produit}\\ \text{de 4 par 2}}} = \underbrace{4^{-1}\times 2^{-1}}_{\text{produit des deux puissances}}$$

7. Puissance d'un quotient

Pour calculer la puissance d'un quotient, il suffit de calculer le **quotient des puissances**.

➢ ***Exemples*** :

$$\underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^3}_{\substack{\text{puissance}\\ \text{du quotient}\\ \text{de 2 par 5}}} = \underbrace{\frac{2^3}{5^3}}_{\substack{\text{quotient}\\ \text{des}\\ \text{puissances}}}$$

II- LES PUISSANCES DE 10

La Terre se situe à 150 000 000 de km du soleil et Jupiter à 779 200 000 de km. Les astronomes doivent parfois effectuer des calculs avec ces grandeurs. La quantité de chiffres dans un nombre complique les calculs et augmente le risque d'erreurs.

1. Définitions

Si n est un entier supérieur ou égal à deux : $10^n = \underbrace{10\times 10\times \ldots\times 10}_{\text{n facteurs égaux à 10}} = 1\underbrace{00\ldots 0}_{\text{n zéros}}$

➢ ***Exemples*** :

$10^{11} = 1\underbrace{00\,000\,000\,000}_{\text{11 zéros}}$ (ou cent milliards) $\qquad 10^7 = 1\underbrace{0\,000\,000}_{\text{7 zéros}}$ (ou dix millions)

n est un nombre entier supérieur à 0 : $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{\text{n zéros}}1.$

➤ ***Exemple*** :

$10^{-7} = 0{,}000\ 000\ 1$

2. Notation scientifique d'un nombre

➡ **Définition** : un nombre décimal peut être écrit d'un infinité de façons sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal et p un nombre entier relatif. L'écriture scientifique d'un nombre décimal est la seule où le nombre a s'écrit avec un seul chiffre avant la virgule, ce chiffre étant différent de 0.

➤ ***Remarque 1*** :

- Dans l'écriture scientifique d'un décimal positif, le nombre ***a*** est plus grand ou égal à 1 et plus petit que 10.
- Dans l'écriture scientifique d'un décimal négatif, le nombre ***a*** est plus petit ou égal à –1 et plus grand que –10.

➤ ***Exemple*** :

L'écriture scientifique de 281,7 est $2{,}817 \times 10^2$.

➤ ***Remarque 2*** : cette notation est pratique, car elle permet de pouvoir, au premier coup d'œil, d'identifier l'ordre de grandeur du nombre.

➤ ***Application*** : comparer $A = 0{,}000\ 56 \times 10^9$ et $B = 125{,}7 \times 10^4$

- J'écris les deux nombres en notation scientifique :
  $A = 5{,}6 \times 10^5$ et $B = 1{,}257 \times 10^6$
- Donc : $A < B$.

3. Règles de calcul

PRODUIT DE DEUX PUISSANCES DE 10

Si n et m sont des entiers relatifs : $\mathbf{10^m \times 10^n = 10^{m+n}}$.

Exemples :

$10^3 \times 10 = 10^3 \times 10^1 = 10^{3+1} = 10^4$ $\qquad$ $10^{-7} \times 10^2 = 10^{-7+2} = 10^{-5}$

PUISSANCE D'UNE PUISSANCE

Si n et m sont des entiers relatifs : $\left(10^n\right)^m = 10^{n\times m}$

Exemples :

$\left(10^3\right)^5 = 10^{3\times 5} = 10^{15}$ $\quad$ $\left(10^{-2}\right)^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6}$

III- EXEMPLES DE CALCULS DU BREVET

- $E = \dfrac{10\times 10^{-3}}{(10^2)^{-4}} = \ldots = \dfrac{10^{-2}}{10^{-8}} = \ldots = 10^6$
- $F = \dfrac{(10^{-1})^3\times 10^4}{10^{-2}\times 10^{-3}} = \ldots = 10^6$
- $G = \dfrac{14\times 10^{-3}\times 5\times 10^6}{2\times 10^4} = \dfrac{14\times 5}{2} \times \dfrac{10^{-3}\times 10^6}{10^4} = \dfrac{2\times 7\times 5}{2} \times \dfrac{10^3}{10^4} = 35 \times 10^{-1} = 3{,}5$