## I- PROPRIETES DE GEOMETRIE A CONNAITRE

### Droites

- Etant donnés une droite (d) et un point A, il existe une seule droite parallèle à (d) et passant par A.
- **Si** deux droites sont parallèles à une même troisième droite, **alors** elles sont parallèles entre elles.
- **Si** deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, **alors** elles sont parallèles entre elles.
- **Si** deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une, **alors** elle est perpendiculaire à l'autre.

### Médiatrice

- **Si** un point est sur la médiatrice d'un segment, **alors** il est équidistant des extrémités de ce segment.
- **Si** un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment, **alors** il est sur la médiatrice de ce segment.

### Parallélogramme

✓ **Quand on sait que l'on a un parallélogramme**

- **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses côtés opposés sont parallèles.
- **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses côtés opposés sont de même longueur.
- **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses diagonales se coupent en leur milieu.
- **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses angles opposés ont la même mesure.

✓ **Pour démontrer que l'on a un parallélogramme**

- **Si** un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un quadrilatère (non croisé) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un quadrilatère a ses angles opposés de la même mesure, **alors** c'est un parallélogramme.

### Losange

✓ **Quand on sait que l'on a un losange**

- **Si** un quadrilatère est un losange, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un quadrilatère est un losange, **alors** ses diagonales sont perpendiculaires.
- **Si** un quadrilatère est un losange, **alors** tous ses côtés ont la même longueur.

✓ **Pour démontrer que l'on a un losange**

- **Si** un quadrilatère a tous ses côtés de la même longueur, **alors** c'est un losange.
- **Si** un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, **alors** c'est un losange.
- **Si** un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, **alors** c'est un losange.

### Rectangle

✓ **Quand on sait que l'on a un rectangle**

- **Si** un quadrilatère est un rectangle, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un quadrilatère est un rectangle, **alors** tous ses angles sont droits.

→ **Si** un quadrilatère est un rectangle, **alors** ses diagonales sont de même longueur.

✓ **Pour démontrer que l'on a un rectangle**
→ **Si** un quadrilatère a tous ses angles de la même mesure, **alors** c'est un rectangle.
→ **Si** un quadrilatère a ses diagonales qui ont la même longueur, **alors** c'est un rectangle.
→ **Si** un parallélogramme a un angle droit, **alors** c'est un rectangle.

### Carré

✓ **Quand on sait que l'on a un carré**
→ **Si** un quadrilatère est un carré, **alors** c'est un losange et un rectangle.

✓ **Pour démontrer que l'on a un carré**
→ **Si** un losange a un angle droit, **alors** c'est un carré.
→ **Si** un losange a ses diagonales qui ont la même longueur, **alors** c'est un carré.
→ **Si** un rectangle a deux côtés consécutifs de la même longueur, **alors** c'est un carré.
→ **Si** un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, **alors** c'est un carré.

## II-INITIATION A LA DEMONSTRATION

### 1) Quelques règles à respecter

1. Une affirmation mathématique est soit vraie, soit fausse.
2. Un exemple et même plusieurs exemples ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie.
3. Un exemple qui ne vérifie pas une affirmation suffit pour prouver que cette affirmation est fausse. Cet exemple est appelé alors un contre-exemple.
4. Une constatation ou des mesures sur une figure ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie.
5. Les constations ou des mesures permettent uniquement d'établir des conjectures.

**Définition** : Une conjecture est un énoncé qui semble vrai alors qu'on ne l'a pas encore prouvé.

Pour prouver que des énoncés de géométrie sont vrais, il faut effectuer **des démonstrations**.

Une démonstration en géométrie est une succession de **chaînons déductifs** qui **partent** des données et **arrivent** à la conclusion.

Pour effectuer une démonstration, on utilise des **propriétés** :

**Définition** : Une propriété mathématique est une phrase logique et vraie, formée d'une condition et d'une conclusion. On utilise une propriété pour justifier un raisonnement.
On écrit souvent une propriété sous la forme :
**« Si** ……**(condition)**……, **alors** ……**(conclusion)**…… **»**

#### Exemple :

$\underbrace{\text{Si deux droites sont perpendiculaires,}}_{\text{condition}}$ alors $\underbrace{\text{elles sont sécantes.}}_{\text{conclusion}}$

On énonce la **réciproque** en inversant la condition et la conclusion de cette propriété.

➤ Exemple:

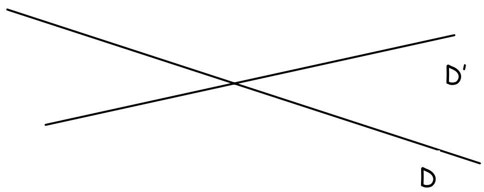
Propriété directe : Si un triangle est isocèle, alors il a un axe de symétrie.

Propriété réciproque: Si un triangle a un axe de symétrie, alors ce triangle est isocèle.

ATTENTION : La réciproque d'un énoncé est très souvent fausse.

➤ Contre-exemple :

Propriété directe: Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont sécantes.
Propriété réciproque : Si deux droites sont sécantes, alors elles sont perpendiculaires. → ***FAUX***
(*Sur la figure suivante, les droites sont sécantes mais pas perpendiculaires)*




## 2) Principe de la démonstration

Pour démontrer, justifier ou prouver des résultats en mathématiques, on utilise des démonstrations.
Une démonstration élémentaire comporte 3 étapes:

*On sait que …* ← Données : ce que je sais par l'énoncé ou les questions précédentes

*Propriété ou définition : si … alors …* ← Propriété ou définition utilisée

*Donc …* ← Conclusion : ce que j'en déduis

Une démonstration utilise des propriétés ou des définitions qui sont ***à connaître par cœur***.
On n'utilise pas les mots "parce que" ou "car".

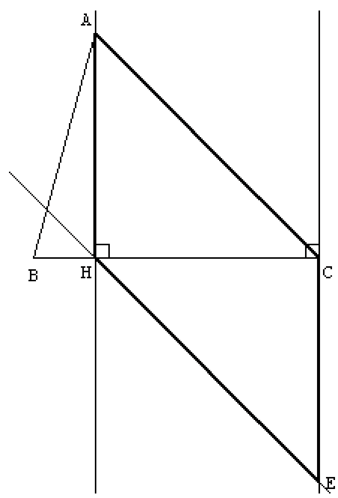
➤ Exemple:

**On sait que**: d1 // d2 et d2 // d3
**Propriété**: si deux droites sont parallèles à la même droite, alors elles sont parallèles.
**donc** d1 // d3.

## 3) Exemple type

➤ **Enoncé :**

ABC est un triangle. Soit (d) la droite perpendiculaire à (BC) qui passe par A ; elle coupe (BC) en H. Soit (d') la droite perpendiculaire à (BC) qui passe par C. La droite parallèle à (AC) qui passe par H coupe (d') en E.
**Démontrer que ACEH est un parallélogramme.**



1. **Il faut regarder ce qu'il faut démontrer, ce sera la conclusion finale**

2. **Ici, il faut démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, je fais donc appel à mes connaissances sur le parallélogramme et j'énonce toutes les propriétés permettant de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme :**
   a. **Si** un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, **alors** c'est un parallélogramme.
   b. **Si** un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
   c. **Si** un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, **alors** c'est un parallélogramme.
   d. **Si** un quadrilatère (non croisé) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
   e. **Si** un quadrilatère a ses angles opposés de la même mesure, **alors** c'est un parallélogramme.

3. **Il faut ensuite choisir la bonne propriété, pour cela je regarde ce que dit l'énoncé :**

Il faut procéder par élimination :

- on ne connaît aucun longueur, on peut donc éliminer, les propriétés b) et c)
- on ne dit rien sur les diagonales, on peut donc éliminer la propriété c)
- on ne connaît aucune mesure d'angle, on peut donc éliminer la propriété e)

➔ il ne reste plus que la propriété a)

4. **Une fois la propriété choisie, il faut regarder dans l'énoncé si toutes les conditions sont requises pour pouvoir appliquer cette propriété :**
   Pour pouvoir appliquer la propriété a), il faut que les droites (AH) et (CE) soient parallèles ainsi que les droites (AC) et (EH). Dans l'énoncé, on sait que les droites (AC) et (HE) sont parallèles par contre, ce n'est pas le cas pour les droites (AH) et (CE), donc il va falloir commencer par démontrer que ces droites sont parallèles. Pour cela, il faut regarder ce que l'on sait à propos de ces droites :

On sait que : ........................................................................................................................................
Propriété :........................................................................................................................................
Donc : ........................................................................................................................................

5. **On peut terminer la démonstration :**

On sait que : ........................................................................................................................................
Propriété : ........................................................................................................................................
Donc :........................................................................................................................................

Il a fallu faire deux démonstrations, pour répondre à l'exercice, on dit que la démonstration est une démonstration à deux pas.