

METHODE 1 : ALGORITHME DES SOUSTRATIONS SUCCESSIVES**1) Conjecture**

Recopier le tableau ci-dessous et écrire dans chaque case la liste des diviseurs des deux nombres pour trouver leur PGCD.

Diviseurs de 96 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 96	Diviseurs de 68 (68 = 96 – 28) : 1 ; 2 ; 4 ; 17 ; 34 ; 68	Diviseurs de 40 (68 – 28) : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 40
Diviseurs de 28 : 1 ; 2 ; 7 ; 14 ; 28	Diviseurs de 68 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 96	Diviseurs de 40 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 96
PGCD de 96 et 28 : 4	PGCD de 60 et 28 : 4	PGCD de 40 et 28 : 4

On remarque que le PGCD de deux nombres a et b ($a > b$) est toujours égal au PGCD de b et de $(a - b)$.

En effet, $\text{PGCD}(96 ; 28) = \text{PGCD}(68 ; 28) = \text{PGCD}(40 ; 28) = 4$

2) Théorème : soit a et b deux entiers naturels avec $a > b$, on a : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - b ; b)$.**3) Démonstration :** a et b étant deux entiers naturels ($a > b$), montrer que le PGCD de a et b est le PGCD de b et $a - b$.

Démonstration directe:

On note d un diviseur commun à a et b .

Il existe 2 entiers q et q' tels que $a = dq$ et $b = dq'$

$$a - b = dq - dq'$$

$$a - b = d(q - q')$$

$q - q'$ étant un entier, d est un diviseur de $a - b$.

Première conclusion: si d est un diviseur de a et b , alors c'est aussi un diviseur de $a - b$.

Démonstration réciproque:

On note d' un diviseur commun à b et $a - b$.

Il existe donc deux entiers k et k' tels que: $b = d'k$ et $a - b = d'k'$.

$$a = a - b + b$$

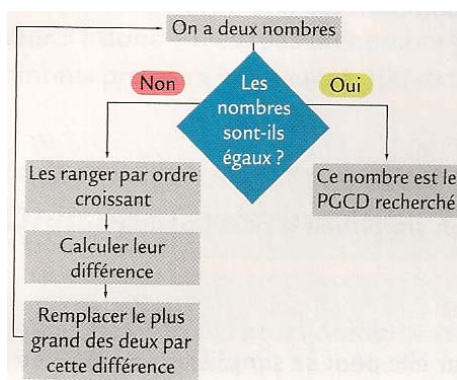
$$a = d'k' + d'k$$

$$a = d'(k' + k)$$

$k' + k$ étant un entier, cela implique que d' est un diviseur de a .

Deuxième conclusion; si d' est un diviseur de $a - b$ et b , alors c'est aussi un diviseur de a .

Conclusion: les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à b et $a - b$.
donc le PGCD de a et b est aussi le PGCD de b et $a - b$.

4) Algorithme :**5) Exemple :** calcul du PGCD de 378 et de 108.

		Différence
378	108	$378 - 108 = 270$
270	108	$270 - 108 = 162$
162	108	$162 - 108 = 54$
108	54	$108 - 54 = 54$
54	54	$54 - 54 = 0$

Donc le PGCD de 378 et de 108 est 54.

- 6) **Applications** : activité 2 du début de cours et exercice n°34 p. 60.

METHODE 2 : ALGORITHME D'EUCLIDE

- 1) **Définition de la division euclidienne** : soit a et b deux entiers naturels avec b non nul. La division euclidienne de a par b est l'opération qui permet de calculer le quotient entier q et le reste entier r de a par b .
C'est-à-dire : $a = bq + r$ $0 \leq r < b$.

Exemple : $1235 = 21 \times 58 + 17$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 5 \quad | \ 2 \ 1 \\ 1 \ 8 \ 5 \quad | \quad \\ \hline 1 \ 7 \quad | \ 5 \ 8 \end{array}$$

- 2) **Théorème (admis)** : **a et b désignent deux nombres entiers naturels avec $a > b$.**
 $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

- 3) **Exemple** : calcul du PGCD de 360 et de 252.

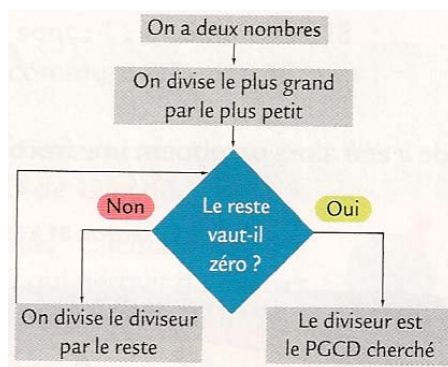
$360 = 252 \times 1 + 108$ d'où, d'après le théorème ci-dessus : $\text{PGCD}(360 ; 252) = \text{PGCD}(252 ; 108)$

$252 = 108 \times 2 + 36$ d'où, d'après le théorème ci-dessus : $\text{PGCD}(360 ; 252) = \text{PGCD}(252 ; 108) = \text{PGCD}(108 ; 36)$

$108 = 36 \times 3 + 0$ d'où, d'après le théorème ci-dessus : $\text{PGCD}(360 ; 252) = \text{PGCD}(252 ; 108) = \text{PGCD}(108 ; 36) = 36$

Donc, le PGCD de 360 et de 252 est 36.

- 4) **Algorithme** :



- 5) **Présentation des calculs** : calcul du PGCD de 360 et de 252.

Dividende	Diviseur	Reste
360	252	108
252	108	36
108	36	0

Le PGCD de 360 et de 252 est 36.

- 6) **Applications** : activité 2 du début de cours et exercice n°37 p. 60.