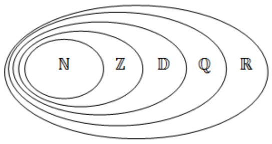
Cours n°1 : NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

L'humanité a mis des millénaires pour construire les nb : 30000 av JC : entailles numériques sur des os ; 8000 av JC : apparition des calculs au moyen orient ; 600 av JC : découverte des nb qui ne sont pas rationnels (diago d'1 carré de coté 1) ; 300 av JC : apparition du 1er zéro en tant que chiffre ; 1er S ap JC : apparitions des nb négatifs ; 5ème S ap JC : 0 en tant que nb (1er nom : en arabe « sfir » = vide, traduction en italien : « zéfiro » qui deviendra zéro.

I- LES NOMBRES

Voici l'ensemble des nombres tels qu'ils se présentent à la sortie du collège :



➔ ℕ : nombres **entiers naturels** (nombres entiers et positifs)

➔ ℤ : nombres **entiers relatifs** (nombres entiers positifs et négatifs).

➔ **𝔻 : nombres décimaux**.

Définition : nombres pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Ex : 0,1 ; 34/1000…

Rq *: tous les nombres entiers sont des nombres décimaux.*

➔ **ℚ : nombres rationnels.**

Définition : nombres pouvant s'écrire comme un quotient de 2 nombres entiers.

Ex : 2/5 ; 0,1 (car 0,1 = 1/10) ; -3 (car -3 = -3/1)…

Rq *: tous les nombres entiers et tous le nb décimaux sont des nombres rationnels.*

➔ **ℝ : nombres réels**.

Définition : ensemble de tous les nombres connus (car tous les nombres ne sont pas rationnels, ils sont alors irrationnels).

Ex : 3 ; 0,666666… ; π ; …

Un chinois a récité pendant 24h environ 68 000 décimales de pi → record officiel.

➤ ***Activité 1*** : un fleuriste dispose de 32 roses blanches et 44 roses rouges. Il veut constituer le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ces fleurs.

a) Combien de bouquets pourra-t-il constituer ?
b) Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

Si on appelle n le nombre de bouquets, a le nombre de roses blanches dans un bouquet et b le nombre de roses rouges dans un bouquet, nous pouvons écrire :

Soit a et b deux entiers positifs tels que : $a \times n = 32$ et $b \times n = 44$

Ou encore : $a = \frac{32}{n}$ *et* $b = \frac{44}{n}$

Comme a et b sont des entiers, cela signifie que n est un diviseur commun à 32 et 44.

De plus, on veut le plus grand nombre de bouquets, donc n est le plus grand diviseur commun.

Correction :

a) Le plus grand diviseur commun de 32 et 44 est 4, donc le fleuriste pourra constituer 4 bouquets identiques.

b) 32 : 4 = 8 et 44 : 4 = 11. Donc chaque bouquet contiendra 8 roses blanches et 11 roses blanches.

- ***Activité 2*** : même énoncé que l'activité précédente, avec 395 roses blanches et 553 roses rouges.
  Beaucoup plus compliqué de trouver le plus grand diviseur commun !! D'où le cours suivant.

II- PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN (PGCD)

1. Rappels

- ***Définition 1*** : soit a et b deux nombres entiers naturels avec b non nul. On dit que b est un diviseur de a si le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre entier.

- ***Remarque*** :
  - La phrase « *b* est un diviseur de *a* », a pour synonyme la phrase « *a* est un multiple de *b* ».

- ***Exemple*** :
  - $\frac{84}{7} = 12$ et $\frac{84}{4} = 21$, donc 7 et 4 sont des diviseurs de 84, ou encore 84 est un multiple de 7 et de 4.
  - Les diviseurs de 36 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 et 36.

- ***Définition 2*** : soit a et b deux nombres entiers naturels. Un nombre entier qui divise à la fois a et b est un diviseur commun à a et à b.

- ***Exemple*** :
  - Les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
  - Les diviseurs de 18 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.
  - Les diviseurs communs à 12 et 18 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6.

➲ ***Curiosité*** : les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre dont la somme de ses diviseurs propres est égale à ce nombre, ou, sous une autre formulation, un nombre dont la somme de ses diviseurs est égale à deux fois ce nombre.

Pour mieux comprendre, prenons le premier nombre parfait : 6.

Par la première formulation, on peut dire que 6=1+2+3. Et par la deuxième formulation , on a également que 12= 2x6 =1+2+3+6.

Actuellement, on connaît 46 nombres parfaits. Les quatre premiers (6 ; 28 ; 496 ; 8 128) sont connus depuis l'antiquité. Le dernier a été découvert en octobre 2008.

On ne connaît que des nombres parfaits pairs. On ne sait toujours pas s'il existe des nombres parfaits impairs et s'il existe une infinité de nombres parfaits.

Il a été établi que :

- les nombres parfaits pairs se terminent par un 6 ou un 8,
- tous les nombres parfaits pairs (à l'exception de 6) sont égaux à une somme de cubes d'entiers impairs.

$$8\,128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

➧ ***Définition 3*** : soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de a et b est appelé de PGCD de a et b (<u>P</u>lus <u>G</u>rand <u>C</u>ommun <u>D</u>iviseur). On le note **PGCD (a ; b).**

➲ ***Exemple*** : PGCD (12 ; 18) = 6.

➲ ***Remarque*** : plusieurs méthodes (appelées algorithmes) existent pour trouver le PGCD de deux nombres.

Qu'est ce qu'un algorithme ?
C'est une méthode, un enchaînement d'actions précises à accomplir de manière systématique et souvent répétitive pour arriver à un résultat. On parle par ex de l'algorithme de la division. Les algorithmes sont au cœur des programmes informatiques.
Son nom vient du grand mathématicien persan Al Khwarizmi (9e S).

Applications : activité cours n°1 (recherche du PGCD) ; exercices 34, 37, 41, 42 p. 60.

III- FRACTIONS IRREDUCTIBLES

1. Nombres premiers

Combien y a-t-il de nb premiers ?
Il en existe une infinité. Le plus grand découvert récemment possède près de 10 millions de chiffres.

➧ ***Définition*** : un nombre premier est un nombre entier qui a **exactement deux diviseurs** : 1 et lui même.

➲ ***Exemples*** :

- 11 a pour seuls diviseurs 1 et 11, donc 11 est un nombre premier.
- 6 a pour diviseur 1 ,2 ,3 et 6. Il a 4 diviseurs, donc 6 n'est pas premier.
- 1 a un seul diviseur (1), il n'est pas un nombre premier.

➲ ***Curiosité*** : les nombres premiers

La découverte des nombres premiers remonte au moins au V^{e} siècle avant J.C.
Au III^{e} siècle avant J.C., Euclide a démontré qu'il y avait une infinité de nombres premiers.
On n'a pas trouvé jusqu'ici de formule permettant d'obtenir tous ces nombres.
Pendant près de 2000 ans, on a utilisé le crible d'Eratosthène pour les rechercher. De nos jours, on utilise des ordinateurs puissants.
La recherche de nombres premiers ayant des centaines de chiffres intéresse à la fois les grands mathématiciens et les informaticiens (les grands nombres premiers servent à coder des informations qui doivent rester secrètes).
Comment se répartissent-ils ? Ils sont de moins en moins nombreux lorsque les nombres sont grands : entre 1 et 100, il y a 25 nombres premiers ; entre 1 000 000 et 1 000 100, il y en a 2 !

Application *: crible d'Eratosthène.*

2. Nombres premiers entre eux

➧ ***Définition*** : on dit que deux nombres sont **premiers entre eux** quand ils ont pour unique diviseur commun 1. Cela revient à dire que leur PGCD est 1.

➲ ***Exemples*** :

- 15 a pour diviseurs : 1, 3, 5 et 15.
- 22 a pour diviseurs : 1, 2, 11 et 22.

L'unique diviseur commun à ces deux nombres est 1. Ils sont donc premiers entre eux.

! ATTENTION ¡ : ne pas confondre nombres premiers et nombres premiers entre eux. En effet, 22 et 15 ne sont pas des nombres premiers car ils ont plus de 2 diviseurs.

3. Fractions irréductibles

➧ ***Définition*** : soit a et b deux nombres entiers avec b différent de 0. La fraction $\frac{a}{b}$ est dite irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux (cela revient à dire quelle est simplifiée au maximum).

➲ ***Exemples*** :

- La fraction $\frac{2}{3}$ est irréductible. En effet, PGCD(2 ; 3) = 1.
- 22 a pour diviseurs : 1, 2, 11 et 22.

L'unique diviseur commun à ces deux nombres est 1. Ils sont donc premiers entre eux.

➧ ***Théorème (admis)*** : pour rendre une fraction irréductible, on calcule le PGCD du numérateur et du dénominateur, puis on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

➲ ***Exemples*** :

- $\frac{22}{15}$ est-elle irréductible ? Trouvons le PGCD.
  - ✓ 22 – 15 = 7
    15 – 7 = 8
    8 – 7 = 1
  - ✓ Le PGCD de 22 et 15 est 1.
  - ✓ Ils sont premiers entre eux.
  - ✓ La fraction est irréductible.

- $\frac{12}{18}$ est-elle irréductible ? Trouvons le PGCD.
  - ✓ 18 – 12 = 6
    12 – 6 = 6
    6 – 6 = 0
  - ✓ Le PGCD est 6.
  - ✓ La fraction est réductible : $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$.
  - ✓ On a ainsi obtenu une nouvelle fraction irréductible.

Démonstration: on note d le PGCD de a et b.
Il existe a ' et b ' tels que a = d a ' et b = d b '.
$\frac{a}{b} = \frac{d\,a'}{d\,b'}$ $\qquad\qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$
Montrons que a ' et b ' sont premiers entre eux.
Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe donc alors trois entiers k, a'' et b '' avec k supérieur où égal à 2 tels que:
a' = k a '' et b' = k b ''
Donc a = dk a '' et b = dk b''
Donc dk est un diviseur commun à a et b, mais strictement supérieur à d.
C'est impossible.
La supposition a' et b' non premiers entre eux est donc fausse.
Donc a' et b' sont premiers entre eux.

***Application** : activité calculatrice ; exercices n°43 ; 46 ; 70 (à faire avec prof) ; 71 ; 72 ; 94 ; 97 p. 61 à 64*