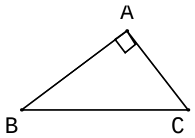
I- RAPPELS

1) Triangle rectangle



ABC est un triangle rectangle en A
[BC] est l'hypoténuse du triangle ABC

➨ ***Définition*** : le côté **adjacent** à un angle dans un triangle rectangle est le côté de l'angle qui n'est pas l'hypoténuse.

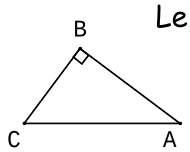
Dans le triangle ABC rectangle en A : le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est [AB]
le côté adjacent à $\widehat{ACB}$ est [AC]

2) Cosinus d'un angle aigu

➨ ***Définition*** : dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse :

$$\text{cosinus d'un angle} = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

✥ ***Exemple*** :



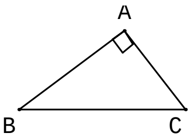
Le triangle ABC est rectangle en B donc : son hypoténuse est [AC]
le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ est [AB]
le côté adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ est [BC]
donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$ et $\cos \widehat{BCA} = \frac{BC}{AC}$

✥ ***Remarque*** : dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de deux longueurs, donc de deux nombres positifs, par conséquent le cosinus d'un angle aigu est un nombre positif. De plus, dans le triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc le cosinus d'un angle aigu est inférieur à 1. On note alors : $0 < \cos \widehat{BAC} < 1$

Comment calculer le cosinus d'un angle aigu ?

Le cosinus d'un angle aigu s'obtient de deux façons différentes :

1) En appliquant sa définition

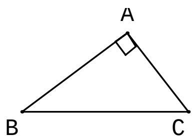


AB = 3cm $\quad \cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

AC = 4cm $\quad \cos \widehat{BCA} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

BC = 5cm

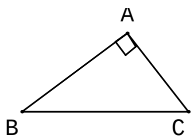
2) En utilisant la valeur de l'angle



$\widehat{ABC} = 53{,}1°$ $\quad \cos \widehat{ABC} = \cos 53{,}1 = 0{,}6$

$\widehat{BCA} = 36{,}9°$ $\quad \cos \widehat{BCA} = \cos 36{,}9 = 0{,}8$

II- SINUS D'UN ANGLE AIGU



ABC est un triangle rectangle en A

[BC] est l'hypoténuse du triangle ABC

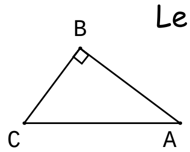
Définition : soit ABC un triangle rectangle en A. Le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ est le côté [AC].

Remarque : le côté opposé à $\widehat{ACB}$ est [AB].

Définition : dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé par la longueur de l'hypoténuse :

$$\text{sinus d'un angle} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en B donc : son hypoténuse est [AC].

Le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ est [BC].

Le côté opposé à l'angle $\widehat{BCA}$ est [AB].

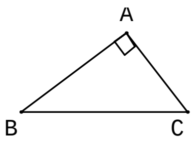
Donc $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ et $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC}$

- ***Remarque*** : Pour les mêmes raisons que le cosinus d'un angle aigu $\hat{x}$, on a :
  $0 < \sin x < 1$.

- ***Comment calculer le sinus d'un angle aigu ?***

Le sinus d'un angle aigu s'obtient de deux façons différentes :

1) En appliquant sa définition

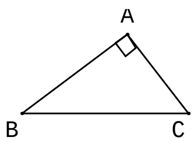


AB = 3cm $\qquad \sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

AC = 4cm $\qquad \sin \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

BC = 5cm

2) En utilisant la valeur de l'angle



$\widehat{ABC} = 53{,}1°$ $\qquad \sin \widehat{ABC} = \sin 53{,}1 = 0{,}8$

$\widehat{BCA} = 36{,}9°$ $\qquad \sin \widehat{BCA} = \sin 36{,}9 = 0{,}6$

- ***Exemple 1*** *: calculer la valeur d'un angle*

Soit le triangle DEF rectangle en D, avec DE = 2,5 cm et EF = 3,2 cm. Donner une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{EFD}$.

L'hypoténuse est [EF], le coté opposé à $\widehat{EFD}$ est [ED].

Donc d'après la définition du sinus d'un angle : $\sin \widehat{EFD} = \frac{ED}{EF} = \frac{2{,}5}{3{,}2} = 0{,}78125$.

Ainsi : $\widehat{EFD} = \sin^{-1} 0{,}78125 \approx 38{,}62$.

Donc l'angle $\widehat{EFD}$ mesure environ 39°.

- ***Exemple 2*** *: calculer la longueur d'un côté*

Soit le triangle EVA rectangle en A, avec AV = 4 m et $\widehat{AEV} = 64°$. Donner une valeur approchée au centimètre près de EV.

Dans le triangle EVA, l'hypoténuse est [EV], le côté opposé à l'angle $\widehat{AEV}$ est [AV].

Donc d'après la définition du sinus d'un angle aigu : $\sin \widehat{AEV} = \frac{AV}{EV}$

C'est-à-dire : $\sin 64 = \frac{4}{EV} \Leftrightarrow \sin 64 \times EV = 4 \Leftrightarrow EV = \frac{4}{\sin 64} \Leftrightarrow EV \approx 4{,}45$

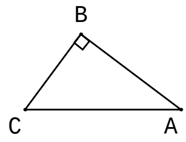
Donc le segment [EF] mesure environ 4,45 m.

III- TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

Définition : dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du côté opposé par la longueur du côté adjacent :

tangente d'un angle = $\dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en B donc :

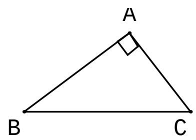
→ le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ est [AB] et le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ est [BC], donc tan $\widehat{BAC}$ = $\dfrac{BC}{AB}$

→ le côté adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ est [BC] et le côté opposé à l'angle $\widehat{BCA}$ est [AB], donc tan $\widehat{BCA}$ = $\dfrac{AB}{BC}$

Comment calculer la tangente d'un angle aigu ?

La tangente d'un angle aigu s'obtient de deux façons différentes :

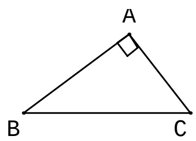
1) En appliquant sa définition



AB = 3cm — tan $\widehat{ABC}$ = $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$ = 1,33

AC = 4cm — tan$\widehat{BCA}$ = $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$ = 0,75

2) En utilisant la valeur de l'angle



$\widehat{ABC}$ = 53,1° — tan $\widehat{ABC}$ = tan 53,1 = 1,33

$\widehat{BCA}$ = 36,9° — tan $\widehat{BCA}$ = tan 36,9 = 0,75

Savoir-faire 1 *: calculer la valeur d'un angle*

Soit le triangle LOU rectangle en L avec OU = 6 cm et OL = 5 cm. Donner une valeur approchée au degré près des angles $\widehat{LUO}$ et $\widehat{LOU}$.

- Le coté adjacent à $\widehat{LUO}$ est [LU] et son côté opposé est [LO].
  Donc d'après la définition de la tangente d'un angle aigu : $\tan\widehat{LUO} = \frac{OL}{UL} = \frac{5}{6}$
  Ainsi : $\widehat{LUO} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 39{,}8°$
  Donc l'angle $\widehat{LUO}$ mesure environ 40°.
- Le coté adjacent à $\widehat{LOU}$ est [LO] et son côté opposé est [LU].

Donc d'après la définition de la tangente d'un angle aigu : $\tan \widehat{LOU} = \frac{UL}{OL} = \frac{6}{5}$

Ainsi : $\widehat{LUO} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right) \approx 50{,}2°$

Donc l'angle $\widehat{LUO}$ mesure environ 50°.

✦ *Exemple 2 : calculer la longueur d'un côté*

Soit le triangle BOL rectangle en B, avec BL = 4 cm et $\widehat{BLO} = 32°$. Donner une valeur approchée au millimètre près de OB.

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{BLO}$ est [BL] et son côté opposé est [OB].

Donc d'après la définition de la tangente d'un angle aigu : $\tan \widehat{BLO} = \frac{OB}{LB}$

C'est-à-dire : $\tan 32 = \frac{OB}{4} \Leftrightarrow OB = 4 \times \tan 32 \approx 2{,}499$

Donc le segment [EF] mesure environ 2,5 cm.

✦ ***Remarque*** : moyen mnémotechnique pour retenir les définitions : CAHSOHTOA

S : sinus ; O : opposé ; H : hypoténuse ; C : cosinus ; T : Tangente.

$$\text{Cos (angle)} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Sin (angle)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Tan (angle)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$$

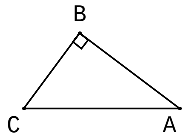
Applications : n° 11, 12 et 15 p. 238 ; n° 18, 20 et 25 p. 239

IV- FORMULES

➧ ***Propriétés*** : on note x la mesure en degré d'un angle aigu d'un triangle rectangle, on a :

$$(1) \quad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Démonstration 1 :



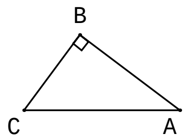
- *Outil utilisé* : définition cosinus et sinus d'un angle aigu et théorème de Pythagore.

- *Démonstration* :

Soit le triangle ABC rectangle en B ci-contre.

- cos$\hat{A}$ =$\frac{AB}{AC}$;
- sin$\hat{A}$ =$\frac{BC}{AC}$
- (cos $\hat{A}$)² + (sin $\hat{A}$)² = $(\frac{AB}{AC})^2 + (\frac{BC}{AC})^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2+BC^2}{AC^2}$;
- Appliquons le théorème de Pythagore dans ABC : $AC^2 = AB^2+BC^2$;
- Donc : (cos $\hat{A}$)² + (sin $\hat{A}$)² = $\frac{AC^2}{AC^2}$= 1 → c.q.f.d.

Démonstration 2 :



- *Outil utilisé* : définition cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu.

- *Démonstration* :

Soit le triangle ABC rectangle en B ci-contre.

- cos$\hat{A}$ =$\frac{AB}{AC}$;
- sin$\hat{A}$ =$\frac{BC}{AC}$
- $\frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC}$ = tan $\hat{A}$ → c.q.f.d.

Exemple : x est la mesure en degré d'un angle tel que cos x = 0,8. Calculer le sinus de cet angle.

On a : (cos x)² + (sin x)² = 1

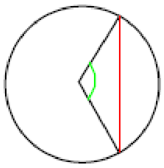
0,8² + (sin x)² = 1 comme sinx> 0, on a sin x = $\sqrt{0,36}$

on en déduit (sin x)² = 1 – 0,64donc sin x = 0,6

(sin x)² = 0,36

COURS N°7 : TRIGONOMETRIE

Histoire



Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure).
On attribue à ***Hipparque de Nicée*** (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.
Le grec ***Claude Ptolémée*** (85 ; 165) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien ***Regiomontanus***, de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques.
Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.