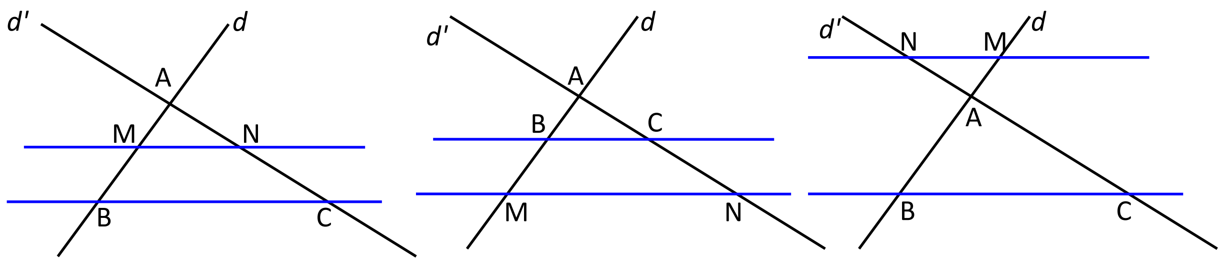
I- THEOREME DE THALES

1) Configuration de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A
Soient B et M deux points de (d), distincts de A
Soient C et N deux points de (d'), distincts de A

} « configuration de Thalès »

Voici les trois configurations de Thalès « classiques » :



Dans les trois cas : (MB) et (NC) sont sécantes en A et (MN) // (BC).

2) Théorème

- ***Théorème*** : dans les triangles AMN et ABC, si M ∈ (AB), N ∈ (AC) et (MN) // (BC),

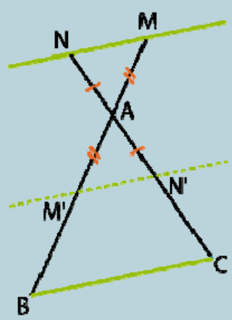
  alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

- ***Remarque*** : il faut faire attention à bien retrouver le sommet commun aux deux triangles dans les deux premiers rapports.

- ***Démonstration*** : voir activité d'introduction.

Idée de la démonstration : On se ramène à la propriété de Thalès vue en 4ème à l'aide d'une symétrie centrale.

Démonstration :
Soit M' le symétrique de M par rapport à A et N' le symétrique de N par rapport à A.



- Le symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle, donc : (N'M') // (NM).
Comme on sait que : (MN) // (BC), on a donc : (N'M') // (BC).

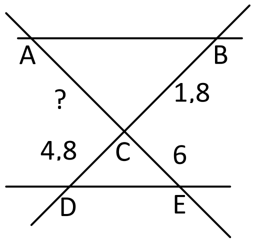
- D'après la propriété de Thalès de 4ème, on sait que :

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$$

- La symétrie centrale conserve les longueurs donc :
AM' = AM AN' = AN M'N' = MN

On a donc : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Application : calculer des longueurs



Sur la figure ci-contre, les droites (AE) et (BD) se coupent en C et les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
Calculer AC.

Etapes :
- Vérifier que les conditions du théorème sont bien vérifiées.
- Ecrire les égalités entre rapport.
- Choisir l'égalité qui permet de calculer la longueur cherchée, utiliser les données numériques et effectuer les calculs.

Solution : Les droites (AE) et (BD) sont sécantes en C. Les points A, C, E d'une part et B, C, D d'autre part, sont alignés dans cet ordre. Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$

On utilise $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$ soit $\frac{1,8}{4,8} = \frac{AC}{6}$ donc $AC \times 4,8 = 1,8 \times 6$

$$AC \times 4,8 = 10,8$$

$$AC = \frac{10,8}{4,8}$$

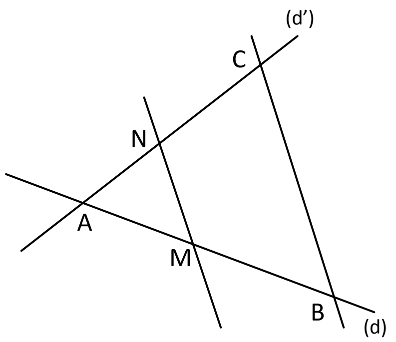
$$AC = \underline{2,25 \text{ cm}}$$

II- <u>RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES</u>

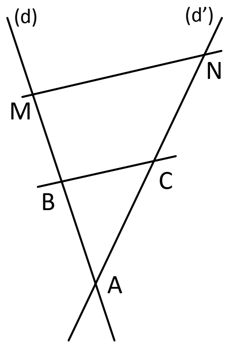
<u>Propriété</u> : dans les triangles AMN et ABC, si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque : une seule égalité de rapports de longueurs permet d'établir le parallélisme des droites (BC) et (MN).

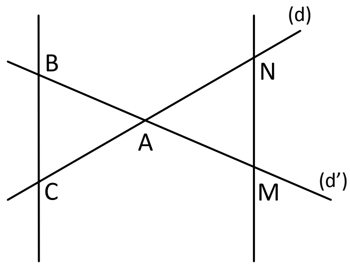
➤ *Remarque* : concernant l'ordre des points, on retrouve trois configurations



Les points A, M, B et les points A, N, C sont alignés dans le même ordre.



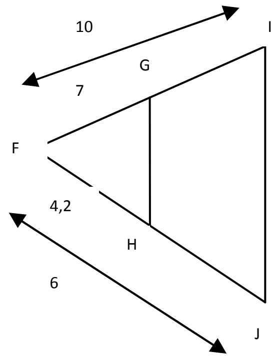
Les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre.



Les points B, A, M et les points C, A, N sont alignés dans le même ordre

➤ *Application* : démontrer que deux droites sont parallèles

Enoncé : sur la figure ci-contre, les points F, G, I sont alignés, ainsi que les points F, H, J.
Démontrer que les droites (GH) et (JI) sont parallèles.



Etapes :

→ Calculer séparément les valeurs exactes des quotients et vérifier qu'ils sont égaux.
→ Vérifier que les points sont alignés dans le même ordre.
→ Conclure en utilisant le théorème de Thalès.

Solution : Les droites (FJ) et (FI) sont sécantes en F

1) $\frac{FG}{FI} = \frac{7}{10}$; $\frac{FH}{FJ} = \frac{4,2}{6}$. On effectue les produits en croix : $7 \times 6 = 42$ et $10 \times 4,2 = 42$

on a égalité des produits en croix donc $\frac{FG}{FI} = \frac{FH}{FJ}$

De plus les points F, G, I et F, H, J sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (GH) et (IJ) sont parallèles.

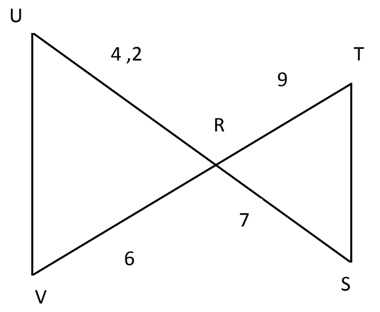
III- CONSEQUENCE DU THEOREME DE THALES

➧ ***Propriété*** : dans les triangles AMN et ABC, si deux des rapports $\frac{AM}{AB}$; $\frac{AN}{AC}$; $\frac{MN}{BC}$ sont différents alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

➤ *Remarque* : cette propriété permet de démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

➤ *Application* : démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Démontrer que les droites (UV) et (TS) ne sont pas parallèles.



Etapes :

→ Calculer séparément les valeurs exactes des quotients
→ Comparer les quotients.
→ Conclure en utilisant le théorème de Thalès.

Solution :

→ On calcule séparément chaque quotient :

$$\frac{RU}{RS} = \frac{4,2}{7}$$

$$\frac{RV}{RT} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

→ On calcule les produits en croix : $4,2 \times 9 = 37,8$ et $7 \times 6 = 42$

→ $37,8 \neq 42$ donc $\frac{RU}{RS} \neq \frac{RV}{RT}$, d'après le théorème de Thalès les droites (UV) et (ST) ne sont pas parallèles.