- **Test de démarrage** (vérification des acquis).

I- PUISSANCES

- ***Définition*** : si a est un nombre relatif et si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$. Le nombre n de l'expression a^n est appelé « exposant ».

- ***Exemples*** :

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$	$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$
On lit « 3 puissance 4 » ou « 3 exposant 4 ».	*On lit « −5 puissance 2 » ou « −5 exposant 2 »*

- **Cas particulier (les puissances de 10)** : si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors : $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n facteurs}} = 1\underbrace{00 \ldots 0}_{\text{n zéro}}$.

- ***Exemple*** : $10^{11} = 1\underbrace{00\,000\,000\,000}_{\text{11 zéros}}$ (ou cent milliards)

- **Propriétés** (*admises*) :
  - Si a est un nombre relatifs : $a^1 = a$.
  - Si a est nombre relatif non nul : $a^0 = 1$.

- ***Exemples*** :

$5^1 = 5$

$(-3)^0 = 1$

- **Propriété du signe d'une puissance** (*admise*) :
  - Si a est un nombre positif : a^n est positif.
  - Si a est un nombre négatif :
    - si n est pair : a^n est positif.
    - si n est impair : a^n est négatif.

- ***Exemples*** :

2^5 est positif car 2 est positif.

$(-5)^7$ est négatif car – 5 est négatif et 7 impair.

$(-3)^2$ est positif car – 3 est négatif et 2 est pair.

Propriété du produit de deux puissances (*admise*) : quel que soit le nombre relatif a et les nombres entiers m et n : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Exemple : $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

Définition : si a est un nombre relatif non nul et n un entier positif : a^n et a^{-n} sont inverses. Autrement dit : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ou encore $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Exemples :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} \qquad \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

Puissances de 10 d'exposant négatif : n est un nombre entier positif :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00 \ldots 0}_{\text{n zéros}}1$$

Exemple :

$10^{-7} = 0{,}000\,000\,1$

Propriété du quotient de deux puissances (*admise*) : quel que soit le nombre relatif a et les nombres entiers m et n : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemple : $\frac{2^3}{2^{-5}} = 2^{3-(-5)} = 2^{3+5} = 2^8$

Propriété de la puissance d'un produit (*admise*) : quels que soient les nombres relatifs a et b, et les nombres entiers m et n : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Exemple : $\underbrace{(2\times 3)^4}_{\text{puissance du produit de 2 par 3}} = \underbrace{2^4 \times 3^4}_{\text{produit des deux puissances}}$

Propriété de la puissance d'une puissance (*admise*) : quel que soit le nombre relatif a et les nombres entiers m et n : $(a^m)^n = a^{m\times n}$

Exemple : $\left(10^{-2}\right)^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6}$

- **Propriété de la puissance d'un quotient** (*admise*) : quels que soient les nombres relatifs a et b, et les nombres entiers m et n : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

- ***Exemple*** :

$$\underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^3}_{\text{puissance du quotient de 2 par 5}} = \underbrace{\frac{2^3}{5^3}}_{\text{quotient des puissances}}$$

Applications : fiche applications n°1

II- EXPRESSIONS LITTERALES

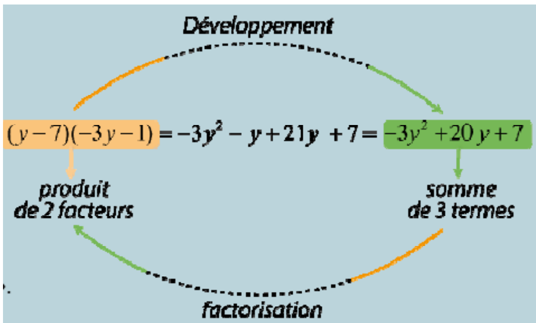
- **Fiche activités : activité n°1** (« promenade dans le parc »).

- ***Définition*** : une expression littérale est une écriture dans laquelle certains nombres sont remplacés par des lettres.

- ***Définition*** : développer un produit, c'est transformer un produit en une somme. L'expression obtenue est appelée : expression développée.

- ***Définition*** : factoriser, c'est transformer une expression en un produit. L'expression obtenue est appelée : expression factorisée.

- ***Exemple*** :



- ***Définition*** : réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles et sans parenthèses (si possible). Pour cela, si x est la variable de l'expression, on regroupe les termes de même degré ensemble.

Exemple 1 :

→ $A = x^2 + 3x + 2x^2 + 7 + 4x$ n'est pas réduite.

→ $B = x^2 + 8x - 14$ est réduite.

L'expression B est réduite car les termes de degré 2 (termes en x^2) sont regroupés, ainsi que les termes de degré 1 (terme en x) et les termes de degré 0 (termes « sans x »).

Exemple 2 : réduire les expressions suivantes.

$$A = 5x + (8 + 3x) - x^2 + 3x + (8x - 1)$$
$$A = 5x + 8 + 3x - x^2 + 3x + 8x - 1$$
$$A = -x^2 + 19x + 7$$

$$B = 10 - (x^2 + 3x) + 12x - 6$$
$$B = 10 - x^2 - 3x + 12x - 6$$
$$B = -x^2 + 9x + 4$$

Applications : exos n° 20 et 23 p. 40 et n° 54 ; 55 ; 56 p. 43

III- DEVELOPPEMENT

1) Développement simple

Propriété (*admise*) : k, a et b désignent des nombres relatifs, nous avons :

$$k\,(a + b) = ka + kb$$
$$\underbrace{k\,(a - b)}_{\text{produit}} = \underbrace{ka - kb}_{\text{somme}}$$

Exemples : développer les expressions $A = -2(y + 7)$ et $B = 4(x - 6)$

$A = -2(y + 7)$	$B = 4(x - 6)$
$A = -2 \times y + (-2) \times 7$	$B = 4 \times x - 4 \times 6$
$A = -2y - 14$	$B = 4x - 24$

2) Développement double

Propriété (*admise*) : a, b, c et d désignent quatre nombres relatifs :

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples : développer, puis réduire les expressions suivantes :

$E = (3x + 2)(5y + 7)$
$E = 3x \times 5y + 3x \times 7 + 2 \times 5y + 2 \times 7$
$E = 15xy + 21x + 10y + 14$

$F = (3x + 2)(5y - 7)$
$F = 3x \times 5y - 3x \times 7 + 2 \times 5y - 2 \times 7$
$F = 15xy - 21x + 10y - 14$

$G = (3x - 2)(5y + 7)$
$G = 3x \times 5y + 3x \times 7 - 2 \times 5y - 2 \times 7$
$G = 15xy + 21x - 10y - 14$

$H = (3x - 2)(5y - 7)$
$H = 3x \times 5y - 3x \times 7 - 2 \times 5y + 2 \times 7$
$H = 15xy - 21x - 10y + 14$

3) Identités remarquables

Il y a plusieurs sortes d'égalités : les équations (tantôt vraies, tantôt fausses, selon les valeurs qu'on substitue aux lettres), et les identités qui sont toujours vraies.

Fiche activités : activité n°2 – partie 1.

Propriété 1 *(carré d'une somme)* : quels que soient les nombres a et b, nous avons

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration : soit a et b deux nombres quelconques, nous avons :

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2 \times ab + b^2$$

$(a + b)^2$ n'est pas égal à $a^2 + b^2$. Il ne faut pas oublier le double produit (2ab).

Exemple : $(x + 6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$

Fiche activités : activité n°2 – partie 2.

Propriété 2 *(carré d'une différence)* : quels que soient les nombres a et b, nous avons

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration : soit a et b deux nombres quelconques, nous avons :

$$(a-b)^2 = (a-b) \times (a-b) = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2 \times ab + b^2$$

Exemple : $(x - 7)^2 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$

Propriété 3 *(produit d'une somme par une différence)* : quels que soient les nombres a et b, nous avons

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

➤ ***Démonstration*** : soit a et b deux nombres quelconques, nous avons :

$$(a+b)\times(a-b) = a\times a - a\times b + b\times a - b\times b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

➤ ***Exemple*** : $(4x + 8)(4x - 8) = (4x)^2 - 8^2 = 16x^2 - 64$

➤ ***Application*** : calculer mentalement :

$R = 101 \times 99$	$S = 1002$	$T = 998$
$R = (100 + 1)(100 - 1)$	$S = (1000 + 2)^2$	$T = (1000 - 2)^2$
$R = 100^2 - 1^2$	$S = 1000^2 + 2 \times 1000 \times 2 + 2^2$	$T = 1000^2 - 2 \times 1000 \times 2 + 2^2$
$R = 10000 - 1$	$S = 1000000 + 4000 + 4$	$T = 1000000 - 4000 + 4$
$R = 9999$	$S = 1004004$	$T = 996004$

40. Au brevet

On considère l'expression :
$E = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$.
a. Développer et réduire E.
b. Comment peut-on en déduire, sans calculatrice, le résultat de $99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998$?

Exercice, juin 2000

Applications : finir exo 54 p. 283 exos n° ... p. ...

IV- FACTORISATION

1) Par recherche du facteur commun

➧ ***Propriété*** (*admise*) : k, a et b désignent des nombres relatifs, nous avons :

$$ka + kb = k\,(a + b)$$
$$ka - kb = k\,(a - b)$$

Factoriser est généralement considéré comme plus difficile que développer. La factorisation requiert une observation attentive de l'expression à factoriser qui permet d'identifier le facteur commun (qui souvent tendance à se cacher !). Tout le problème est de reconnaître ce facteur commun !

➤ ***Exemple*** : factoriser les expressions $C = -18x + 9$ et $D = 45y - 105$

$C = -18x + 9$	$D = 45y - 105$
$C = 9 \times (-2x) + 9 \times 1$	$D = 5 \times 9y + 5 \times 21$
$C = 9(-2x + 1)$	$D = 5(9y + 21)$

➤ ***Exemples*** : factoriser les expressions suivantes :

$K = (x + 1)(x + 2) + 5(x + 2)$
$K = (x + 1)(x + 2) + 5(x + 2)$
$K = (x + 2)[(x + 1) + 5]$
$K = (x + 2)(x + 1 + 5)$
$K = (x + 2)(x + 6)$

$L = (x + 3)(4x + 5) - (x + 3)(2x - 4)$
$L = (x + 3)(4x + 5) - (x + 3)(2x - 4)$
$L = (x + 3)[(4x + 5) - (2x - 4)]$
$L = (x + 3)(4x + 5 - 2x + 4)$
$L = (x + 3)(2x + 9)$

$M = (x + 3)^2 + (x + 3)(2x - 4)$
$M = (x + 3)(x + 3) + (x + 3)(2x - 4)$
$M = (x + 3)[(x + 3) + (2x - 4)]$
$M = (x + 3)(x + 3 + 2x - 4)$
$M = (x + 3)(3x - 1)$

$N = x + 3 + (x + 3)(2x - 4)$
$N = (x + 3) \times 1 + (x + 3)(2x - 4)$
$N = (x + 3)[1 + (2x - 4)]$
$N = (x + 3)(1 + 2x - 4)$
$N = (x + 3)(2x - 3)$

2) En utilisant une identité remarquable

➡ ***Propriété*** : pour tous nombres a et b :

→ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
→ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
→ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

➤ ***Application*** : factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

- $U = 9x^2 + 12x + 4$

L'expression U est sous la forme $a^2 + 2ab + b^2$ et on veut l'écrire sous la forme $(a + b)^2$, il faut donc déterminer a et b, pour cela il faut trouver les deux termes au carré :
$9x^2 = (3x)^2$ et $4 = 2^2$ donc $a = 3x$ et $b = 2$
Il faut vérifier que le terme restant est égal au double produit de a et b : $2 \times 3x \times 2 = 12x$
$U = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2$
$U = (3x + 2)^2$

- $V = 16x^2 - 40x + 25$

L'expression V est sous la forme $a^2 - 2ab + b^2$ et on veut l'écrire sous la forme $(a - b)^2$, il faut donc déterminer a et b, pour cela il faut trouver les deux termes au carré :
$16x^2 = (4x)^2$ et $25 = 5^2$ donc $a = 4x$ et $b = 5$
Il faut vérifier que le terme restant est égal au double produit de a et b : $2 \times 4x \times 5 = 40x$
$V = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2$
$V = (4x - 5)^2$

- $W = 121x^2 - 169$

L'expression W est sous la forme $a^2 - b^2$ et on veut l'écrire sous la forme $(a + b)(a - b)$, il faut donc déterminer a et b, pour cela il faut trouver les deux termes au carré :

$121x^2 = (11x)^2$ et $169 = 13^2$ donc $a = 11x$ et $b = 169$

$W = (11x)^2 - 13^2$

$W = (11x + 13)(11x - 13)$

➤ ***Remarques*** **:** on peut toujours factoriser une différence de 2 carrés

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$

On ne peut pas, en général, factoriser la somme de 2 carrés

$x^2 + 9 = x^2 + 3^2$…