- **Vérification des acquis** (oral).

- **Découverte de la section d'un pavé droit par un plan** (faire fiche activité 1).

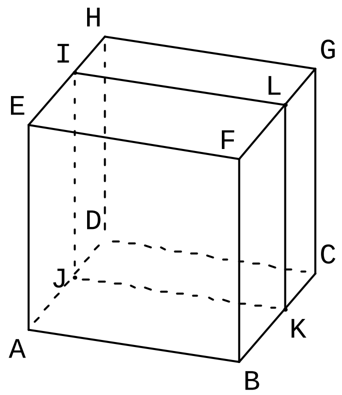
I- SECTION DE PARALLELEPIPEDE RECTANGLE PAR UN PLAN

1) Plan

Pour avoir une représentation d'un plan, on peut, par exemple, imaginer une plaque métallique très fine et rigide dont on peut indéfiniment augmenter les dimensions.
Un plan est souvent représenté ainsi :

2) Section d'un cube par un plan parallèle à une face

- ***Propriété*** (*admise*) : la section d'un cube par un plan parallèle à une face est un **carré**. La longueur d'un côté du carré est la longueur de l'arête du cube.



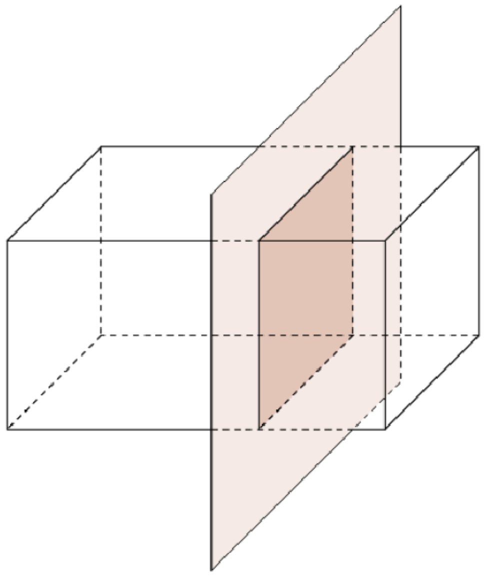
- **Exemple :**
La section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à la face ABEF est le carré IJKL avec IL = HG.

- **Animation** :
http://mathocollege.free.fr/3d/cube/cube3.html

3) Section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face

- ***Propriété*** (*admise*) : la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face est **un rectangle** dont les dimensions sont celles de la face en question.

➤ ***Exemple*** :

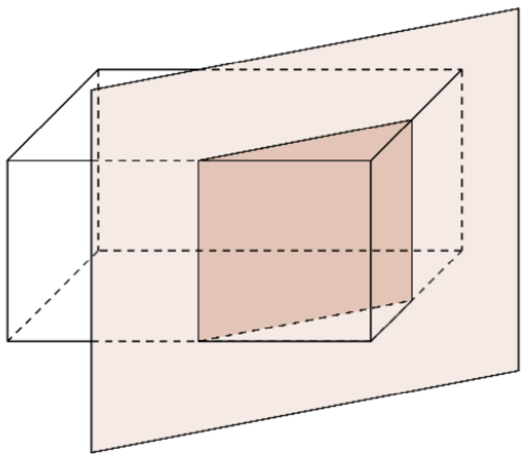


La section du parallélépipède rectangle ABCDEFGH par le plan parallèle à la face ADHE est le rectangle IJKL avec : IJ = AD et IL = AE.

4) Section d'un parallélépipède ou d'un cube par un plan parallèle à une arête

➡ ***Propriété*** (*admise*): la section d'un cube ou d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête est **un rectangle** dont une dimension est égale à la longueur de cette arête et dont l'autre dimension dépend de la position du plan.

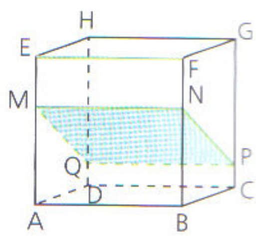
➤ ***Exemple*** :



La section du parallélépipède rectangle ABCDEFGH par le plan parallèle à l'arête … est le rectangle IJKL avec :
… = ….

➤ **Savoir-faire : construire en vraie grandeur la section d'un parallélépipède rectangle par un plan**

Enoncé : Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre est coupé par le plan (MNP) parallèle à l'arête [EF].
On donne : BF = 3cm, BC = 2cm, EF = 4cm, FN = 1cm et
CP = 0,5cm.

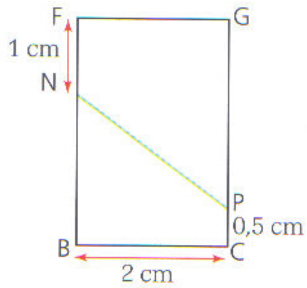


Dessiner en vraie grandeur la section MNPQ, en utilisant que les outils de géométrie et en commençant par calculer NP.

Solution : Le plan (MNP) est parallèle à l'arête [EF] donc la section MNPQ est un rectangle tel que MN = EF = 4 cm.

a) Détermination graphique de NP

On trace la face rectangulaire BFGC telle que BC = 2cm et BF = 3cm. Puis on place le point N du segment [BF] tel que FN = 1cm et le point P du segment [CG] tel que CP = 0,5 cm



On trace la section MNPQ sachant que c'est un rectangle de longueur MN = 4cm et de largeur NP que l'on reportera au compas à partir de la figure précédente.

b) Calcul de NP

- → Soit H le point du segment [BF] tel que (PH) soit perpendiculaire à (BF).
- → Le quadrilatère BCPH à trois angles droits donc BCPH est un rectangle par conséquent : HP = BC = 2cm et BH = CP = 0,5cm.
- → Les points B, H, N, F sont alignés dans cet ordre, on obtient :
  HN = BF – NF – HB soit HN = 3 – 1 – 0,5
  D'où HN = 1,5cm
- → Le triangle NHP est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :
  $NP^2 = HN^2 + HP^2$
  $NP^2 = 1,5^2 + 2^2$
  $NP^2 = 2,25 + 4$
  $NP^2 = 6,25$
  $NP = \sqrt{6,25}$
  NP = 2,5 cm
- → La section MNPQ est donc un rectangle tel que: MN = 4cm et NP = 2,5cm.

Applications : exos n° 7 ; 9 ; 47 p. 280…

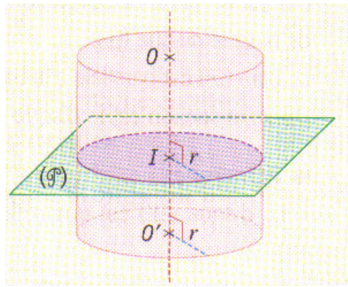
II- SECTION D'UN CYLINDRE PAR UN PLAN

- **Découverte de la section d'un cylindre par un plan** (faire fiche activité 2).

1) Section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à son axe

- ***Propriété*** (*admise*) : la section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à son axe est un **cercle** de même rayon que la base.

- *Exemple* :

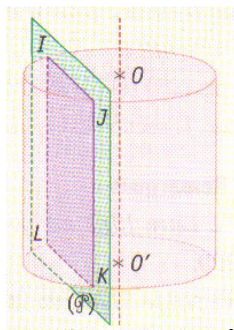


Le plan (P) est perpendiculaire à l'axe (OO').
Donc, la section est le disque de centre I et de rayon r.

2) Section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe

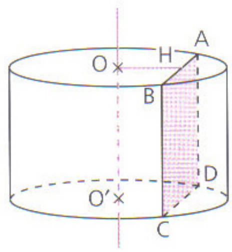
- ***Propriété*** (*admise*) : la section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un **rectangle** dont une dimension est la hauteur du cylindre.

- *Exemple* :



Le plan (P) est parallèle à l'axe (OO').
Donc, la section est le rectangle IJKL.
On a : JK = OO'

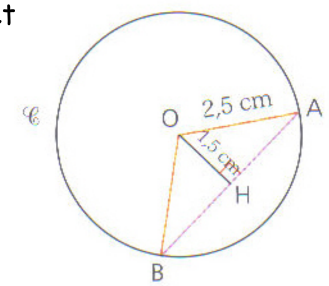
- ***Savoir-faire*** : **calculer les dimensions de la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe.**



Enoncé : Le cylindre de révolution ci-contre de hauteur 3cm et de diamètre 5cm est coupé par un plan parallèle à son axe situé à 1,5 cm de l'axe.
Calculer les dimensions de la section

Solution : le plan est parallèle à l'axe (OO'), donc la section ABCD est un rectangle tel que AD = OO' = 3cm.
Pour calculer AB, on travaille dans le cercle de base de centre O et de rayon 2,5cm.

→ A et B sont des points du cercle (C) de centre O et de rayon 2,5cm, donc OA = OB = 2,5cm.
→ Le triangle AOB est donc isocèle en O.



→ Le point H est le pied de la hauteur du sommet principal O, donc H est le milieu de [AB]. Le triangle OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$OA^2 = OH^2 + HA^2$ d'où $HA^2 = OA^2 - OH^2$

$HA^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2$

$HA^2 = 6{,}25 - 2{,}25$

$HA^2 = 4$

$HA = 2$cm

H est le milieu de [AB], donc $AB = 2 \times AH$

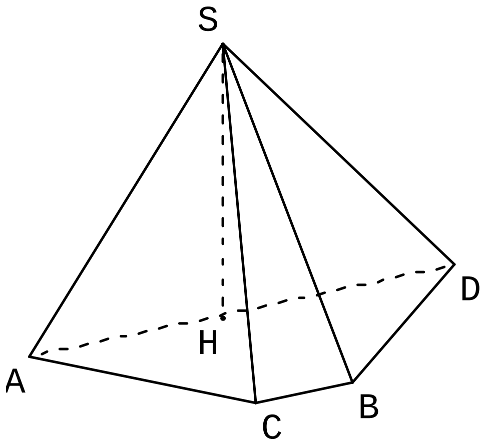
$AB = 2 \times 2$

$AB = 4$cm

→ La section ABCD est donc un rectangle de dimensions 3cm et 4cm.

III- RAPPELS : PYRAMIDES ET CÔNES DE REVOLUTION

1) Pyramides



Définition : une **pyramide de sommet S** est un solide délimité par :

- **sa base** : c'est la face polygonale qui ne contient pas S ;
- **ses faces latérales** : ce sont des triangles de sommet S, dont un côté est un côté de la base.

Remarque : il y a autant de faces latérales que de côtés qui composent le polygone formant la base.

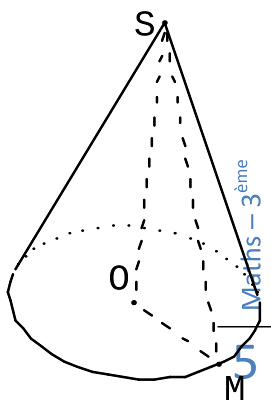
Exemple : si la base de la pyramide est un pentagone, alors la pyramide sera composée de 5 faces latérales.

Définition : la **hauteur** d'une pyramide de sommet S est le segment [SH] perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan. La longueur SH est aussi appelée hauteur de la pyramide.

Définition : une pyramide est **régulière** lorsque :

- sa base est un polygone régulier de centre O ;
- [SO] est la hauteur de la pyramide.

2) Cône de révolution

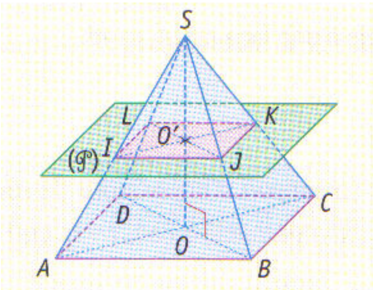


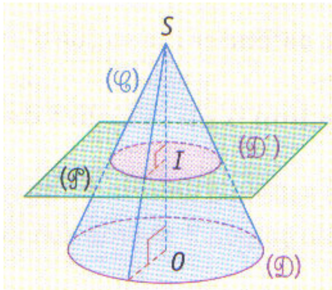
Définition : un **cône de révolution de sommet S** est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O, autour de la droite (SO). Le disque de centre O et de rayon OM est la base de ce cône. [SO] est appelée hauteur du cône.

IV- SECTION D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CÔNE DE REVOLUTION PAR UN PLAN PARALLELE A LA BASE

- ***Propriété*** (*admise*) : la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base est une **figure de même nature** que celle de la base.

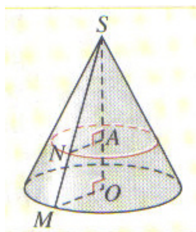
- ***Exemples :***





SABCD est une pyramide, sa base est le carré ABCD.
Le plan P est parallèle à la base, donc la section est le carré IJKL.
Remarques :
Le carré IJKL est une réduction du carré ABCD.
Le solide SIJK est une pyramide, réduction de la pyramide SABC.
Le rapport de réduction est :
$\frac{SI}{SA}$ *ou* $\frac{SO'}{SO}$ *ou* $\frac{IJ}{AB}$

(C) est un cône de révolution de sommet S et de base le disque (D).
La plan (P) est parallèle à la base.
Donc la section est le disque (D') de centre I.
Remarques :
Le disque(D') est une réduction du disque (D).
Le solide de sommet S qui a pour base le disque (D') est un cône de révolution, réduction du cône (C).
de *Le rapport de réduction est* $\frac{SI}{SO}$



Enoncé : Un cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon 5cm. De plus SO = 10 cm. A est le point de la hauteur [SO] tel sue SA = 7cm. Le plan perpendiculaire en A à (OS) coupe une génératrice [SM] en N.
Calculer le rayon de la section du cône par ce plan.

Solution : Dans le triangle SOM, les droites (OM) et (AN) sont parallèles, les points S, N, M et S, A, O sont alignés donc d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM}$ d'où $\frac{AN}{5} = \frac{7}{10}$ et $AN = \frac{7 \times 5}{10} = 3{,}5\text{cm}$

La section est le cercle de centre A et de rayon 3,5cm.

du grec sphaira (balle à jouer)

V- SPHERE ET BOULE

EXERCICE

On veut représenter la sphère terrestre. Pour cela, trace un cercle de rayon 5 cm.

1- Quelle est la forme géométrique de l'équateur, du tropique du Cancer, du tropique du Capricorne ? Représente-les sur ta figure.

Aide : Effectue une recherche dans le dictionnaire ou sur Internet pour savoir comment on représente un cercle en perspective.

2- Que peux-tu dire des centres de ces cercles ? Quel est le cercle le plus grand ?

On dit que l'équateur est un **grand cercle** de la sphère terrestre, son centre est également le centre de la sphère.

3- Effectue une recherche dans le dictionnaire ou sur Internet et cite des demi-grands cercles de la sphère terrestre. Comment se nomment-ils ? Trace quelques-uns de ces demi-grands cercles sur ta figure. Quel est leur rôle ? Qu'évoque pour toi Greenwich ?

1) Définitions et vocabulaire

- ***Définition*** : on appelle **sphère de centre O et de rayon R**, l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que OM = R.

- ***Exemple*** : une bulle de savon.

- ***Définition*** : on appelle **boule de centre O et de rayon R**, l'ensemble de tous les points M de l'espace dont la distance de O est inférieure ou égale à R. Elle est donc constituée de la sphère de centre O et de rayon R et de son intérieur.

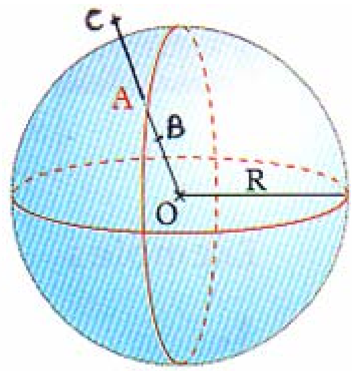
- ***Exemple*** : une boule de glace.

- ***Illustration*** :

Soit $\mathbb{S}$ la sphere de centre O est de rayon R et $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon R. On a :

→ $B \in \mathscr{B}$ $B \notin \mathbb{S}$

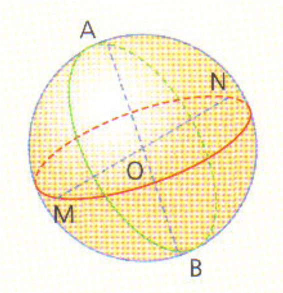
→ $A \in \mathscr{B}$ $A \in \mathbb{S}$



→ C∉𝔅 C∉𝕊

Remarque :

Le cercle rouge et le cercle vert ont le même rayon que la sphère : on les appelle des **grands cercles**.

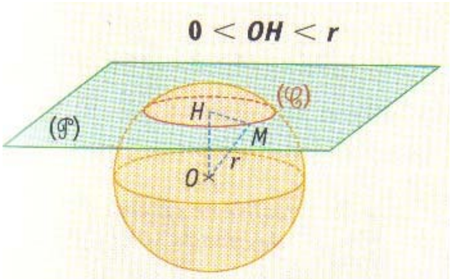


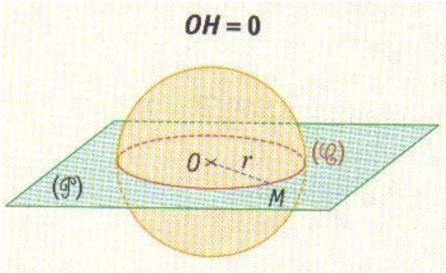
O est le milieu de [AB] : on dit que A et B sont **diamétralement opposés.**
M et N sont également diamétralement opposés.

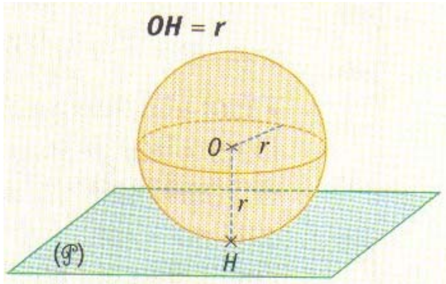
3) Section d'une sphère par un plan

Propriété : la section d'une sphère par un plan est un **cercle**.

On considère une sphère de centre O et de rayon r, et un plan P perpendiculaire à (OH).
OH est la distance du centre O de la sphère, au plan P. Il existe 3 situations :







Le plan et la sphère sont sécants.
Si M est un point du cercle (C), alors le triangle HOM est rectangle en H.

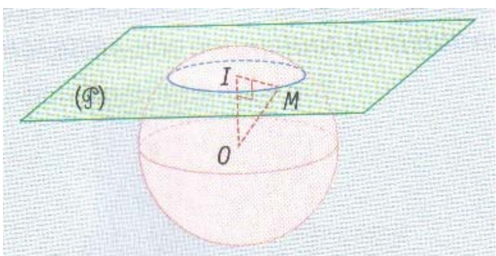
Le point H et le point O sont confondus. Le cercle (C) est un grand cercle de la sphère.
La sphère est partagée en deux hémisphères.

Le plan est la sphère ont un seul point commun. On dit que la sphère et le plan sont tangents en H.

Remarque : Si OH > r, le plan (P) ne coupe pas la sphère.

Savoir-faire : **Calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan**

Enoncé : on coupe une sphère de centre O et de rayon 6cm par un plan (P). La droite passant par le point O et perpendiculaire au plan (P) coupe ce plan au point I. La distance du centre de la sphère au plan (P) est 4,8cm. Le point M appartient à la section de la sphère par le plan.



Préciser la nature de la section de la sphère par le plan, puis calculer la longueur IM.

Solution : la section de la sphère par le plan (P) est un cercle de centre I. Le triangle IOM est rectangle en I, or d'après le théorème de Pythagore on a :

$OM^2 = OI^2 + IM^2$ d'où $IM^2 = OM^2 - OI^2$

$IM^2 = 6^2 - 4{,}8^2$ Or $IM > 0$ donc $IM = \sqrt{12{,}96}$

$IM^2 = 36 - 23{,}04$ $IM \sim 3{,}6$cm

$IM^2 = 12{,}96$

Donc la section de la sphère de centre O et de rayon 6 cm par le plan (P) est un cercle de centre I et de rayon 3,6cm.