I- DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

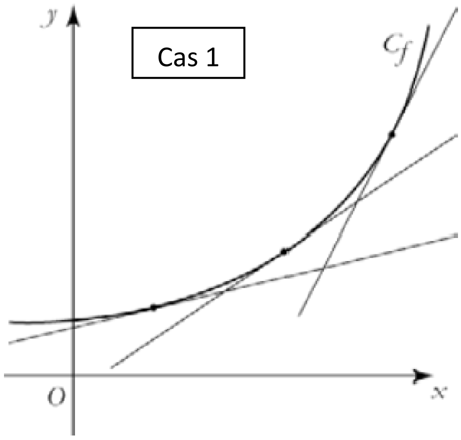
1) Du sens de variation au signe de la dérivée

Théorème *(admis)* : soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

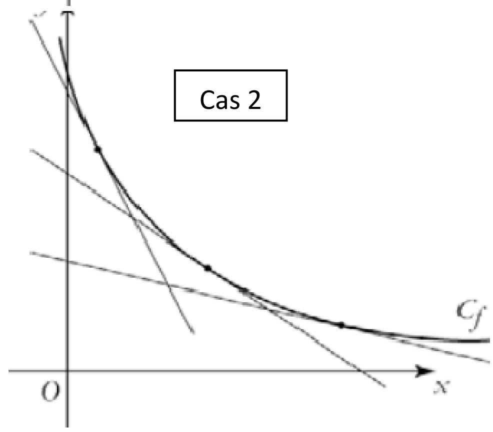
- Si f est une fonction croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est une fonction décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est une fonction constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Graphiquement : on considère la représentation graphique d'une fonction f et de trois de ses tangentes sur un intervalle I, dans les deux cas de figures suivants :

→ La courbe représentative de f « monte » sur I. f est donc croissante sur I. Les tangentes ont un coefficient directeur positif ; autrement dit, tous les nombres dérivés sont positifs.

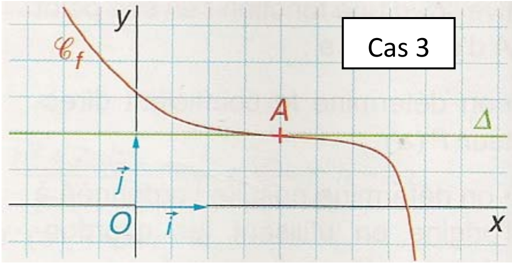


→ La courbe représentative de f « descend » sur I. f est donc décroissante sur I. Les tangentes ont un coefficient directeur négatif ; autrement dit, tous les nombres dérivés sont négatifs.



→ Même si f est strictement monotone sur l'intervalle I, la fonction f' peut s'annuler sur I comme on peut l'observer sur le graphique ci-contre.
La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;4]$, mais sa dérivée n'est pas strictement négative sur cet intervalle.
La tangente Δ en A a pour coefficient directeur 0, donc $f'(2) = 0$.

Pour des valeurs isolées de x



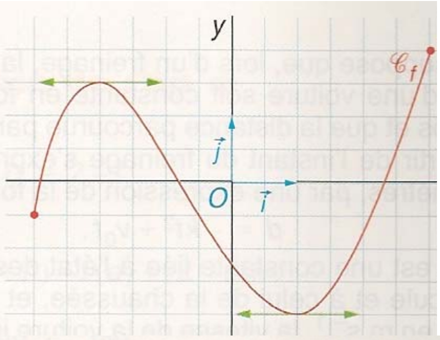
➤ ***Animation « skieur »*** : http://missiontice.ac-besancon.fr/lp_maths_sciences/tableau_virtuel/maths/geogebra/derivee/pe_nombre_derivee.htm

➤ ***Exemples*** : **activité Euler n° 1585.**

➤ ***Exemple*** :

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3\,;3]$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à l'axe $(O\,;\vec{i})$.

Par lecture graphique, déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.



• La courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet que deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses : au point $A(-2\,;1{,}5)$ et au point $B(1\,;-2)$.
Donc $f'(-2) = 0$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour $x \neq -2$ et $x \neq 1$.
• f est croissante sur $[-3\,;-2]$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-3\,;-2]$.
• f est décroissante sur $[-2\,;1]$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-2\,;1]$.
• f est croissante sur $[1\,;3]$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;3]$.

Finalement, le signe de $f'(x)$ est :

x	-3		-2		1		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

2) Du signe de la dérivée au sens de variation

Théorème (*admis*) : soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition Df.

- Si, pour tout réel x de I, $f'(x)$ est strictement positive, alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x)$ est strictement négative, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x)$ est nulle, alors f est constante sur I.

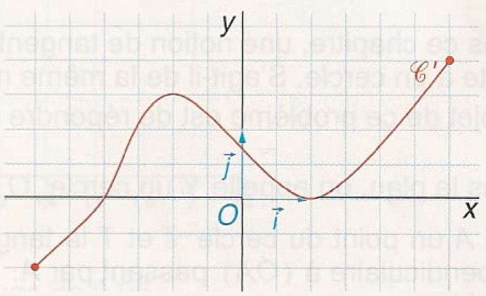
Méthode : en pratique, pour déterminer le tableau de variation d'une fonction f dérivable Df :

- ✓ on calcule la fonction dérivée de f ;
- ✓ on partage l'ensemble D en intervalles sur lesquels la dérivée f' garde un signe constant ;
- ✓ sur chaque intervalle I, on applique les résultats suivants :
  - si f' est positive et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est strictement croissante sur I ;
  - si f' est négative et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est strictement décroissante sur I.
- ✓ on remarque que l'on peut conclure sur une monotonie stricte, car f n'est constante sur aucun intervalle [a, b] avec a < b, puisque f' n'est pas identiquement nulle sur cet intervalle.

Exemple 1 :

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[-3\,;3]$.

Déterminer le tableau des variations de la fonction f.



- f' ne s'annule qu'en -2 et 1, donc en un nombre fini de points.
- f' est négative sur $[-3\,;-2]$, donc f est strictement décroissante sur $[-3\,;-2]$.
- f' est positive sur $[-2\,;3]$, donc f est strictement croissante sur $[-2\,;3]$.

On en déduit le tableau des variations de la fonction f :

x	-3		-2		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-3)$	↘	$f(-2)$	↗			$f(3)$

- ***Exemple 2*** :

  Soit f la fonction définie sur IR par f : $x \longmapsto x^3 + 9$
  f est une fonction polynôme , elle est donc dérivable sur IR et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$
  - $f'(0) = 0$
  - Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.
  Ainsi f est strictement croissante sur IR .
  On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗	9	↗	

- ***Exemple 3*** : Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$. Df = ℝ
  → On calcule la fonction dérivée : $f'(x) = 2(3x^2) + 3(2x) - 12 = 6x^2 + 6x - 12$
  → On étudie le signe de $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324 = 18^2$
  Les deux solutions sont $x_1 = \dfrac{-6+18}{2\times 6} = \dfrac{12}{12} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-6-18}{2\times 6} = \dfrac{-24}{12} = -2$
  Et le signe de $f'(x)$ est donc donné par :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	26	↘	-1	↗	

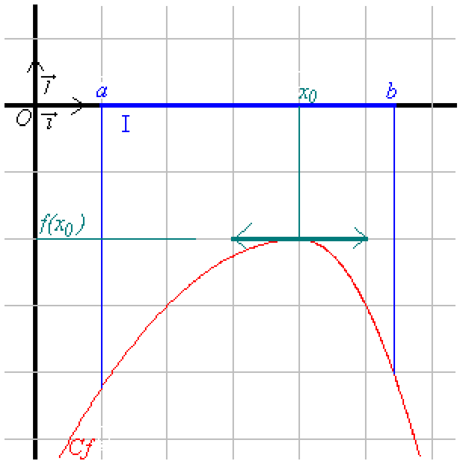
- ***Remarque*** : pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver, d'autres techniques (vues antérieurement) sont parfois plus directes.

II- EXTREMUM D'UNE FONCTION

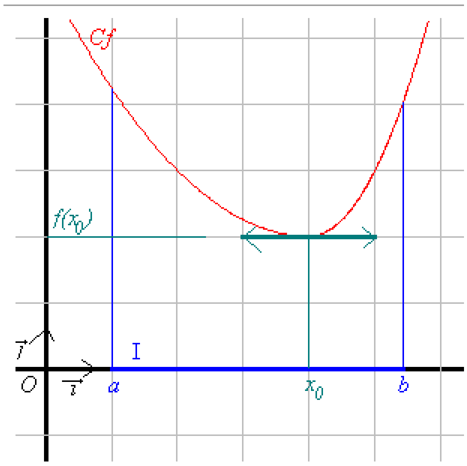
- ***Remarque*** : dans l'exemple précédent, on constate que :
  → Pour x = 1, la fonction f admet un minimum local : f(1) = -1.
  → Pour x = -2, la fonction f admet un maximum local : f(-2) = 26.

L'étude des variations d'une fonction permet donc de déterminer ses valeurs extrêmes. En effet, quand une fonction change de sens de variation en x_0, elle admet un extremum relatif en x_0. On constate alors que la dérivée s'annule en ce point. On admet le théorème suivant.

➡ ***Théorème*** *(admis)* : pour toute fonction f définie sur I, dérivable sur I et admettant un extremum local (maximum ou minimum) en un point x_0 distinct des extrémités de I, nous avons $f'(x_0) = 0$.



Dans les 2 cas, le coefficient directeur de la tangente à Cf en x_0 est nul (tangente parallèle à $(O\ \vec{\imath})$), ainsi $f'(x_0) = 0$.



➤ ***Exemple 1*** : soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$. On constate sur le tableau de variation de f (voir ex. 3 précédent) qu'elle admet un maximum local en -2 et un minimum local en 1.

Et on constate que :

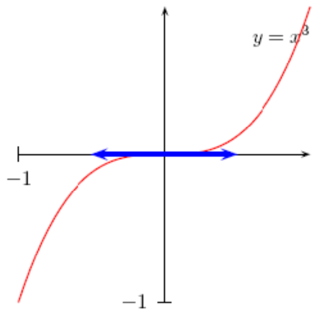
$f'(-2) = 6 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) - 12 = 24 - 12 - 12 = 0$ et $f'(1) = 6 \times 1^2 + 6 \times 1 - 12 = 6 + 6 - 12 = 0$

➤ ***Remarque*** : attention, la réciproque du théorème précédent n'est pas vraie !

➤ ***Contre-exemple*** : soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

La dérivée de f est : $f'(x) = 3x^2$, ainsi $f'(0) = 0$. Mais f n'admet si maximum, ni minimum.

Il ne suffit pas que sa dérivée s'annule en x_0, il faut en plus qu'elle change de signe.



III- EQUATION DE LA FORME f(x) = λ

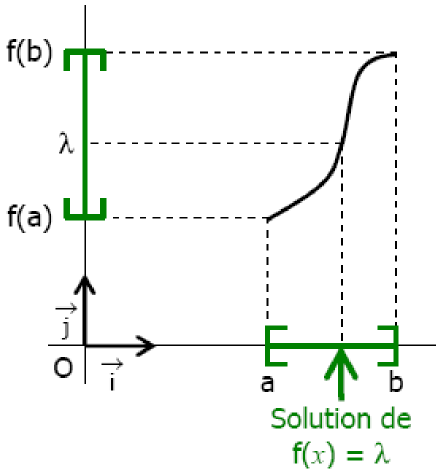
Pour de nombreuses équations, comme $x^7 + 3x^4 - 9x = 7$ ou $\cos x - 3x - 7 = 0$, on ne dispose pas de méthode pour déterminer l'existence de solutions et, en cas d'existence, les valeurs exactes des solutions.

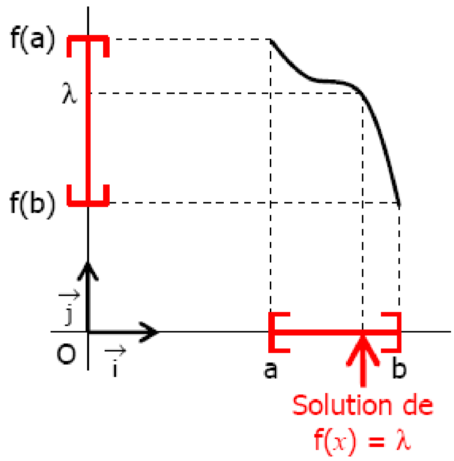
On va voir que, pour une équation écrite sous la forme $f(x) = \lambda$, l'étude du sens de variation de f et l'utilisation du théorème suivant permettent de démontrer l'existence de solutions. De plus, dans l'exemple ci-dessous, on explique comment déterminer des valeurs approchées des solutions éventuelles, à l'aide de la calculatrice.

- ***Théorème des valeurs intermédiaires*** *(admis)* : soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; b] (a < b) et λ un réel tel que :
  - f est dérivable sur [a ; b] ;
  - f est strictement monotone sur [a ; b] ;
  - λ est compris entre f(a) et f(b).

  Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution dans [a ; b].

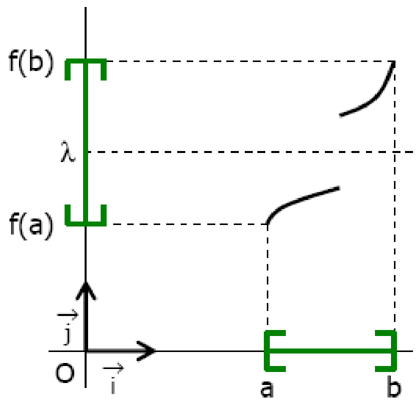
- ***Graphiquement*** :



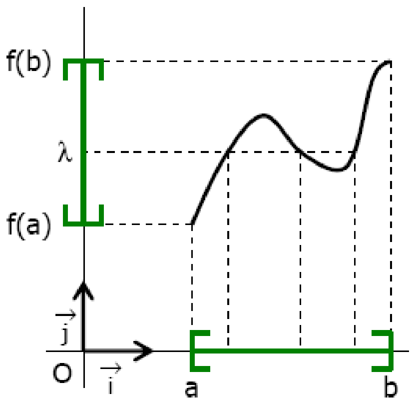


- ***Remarque*** : chacune des trois hypothèses du théorème est indispensable ! Ainsi, pour utiliser ce théorème, il faut bien vérifier que :

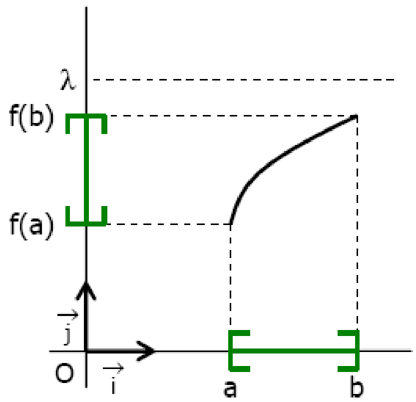
... f est **dérivable** sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque de ne pas avoir de solution.



... f est **strictement croissante** (décroissante) sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque d'avoir plusieurs solutions.



... **λ ∈ [f(a) ; f(b)]** sinon f(x) = λ n'aura pas de solution.



- ***Exemple*** : on considère l'équation $x^3 - 3x^2 - 45x = 50$ sur l'intervalle [-5 ; 5].
    - ✓ Pour étudier cette équation, on introduit la fonction f définie sur [-5 ; 5] par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x$ et on étudie les variations de cette fonction.
    - ✓ f est un polynôme, donc f est dérivable sur l'intervalle et $f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$.
    - ✓ La fonction f' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 576$. Ce polynôme s'annule donc en -3 et 5. En utilisant le théorème sur le signe d'un polynôme du second degré avec $\Delta > 0$ et $a > 0$, on en déduit alors le tableau de signes de $3x^2 - 6x - 45$, puis le tableau de variation de f ci-dessous :

x	-5		-3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	25	$\nearrow$	81	$\searrow$	-175

- ✓ On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires (le changement dans le sens de variation de f oblige à distinguer deux cas) :

■ Sur l'intervalle $[-5, -3]$, on constate que :

• f est dérivable sur $[-5, -3]$;

• f est strictement croissante sur $[-5, -3]$;

• 50 est compris entre $f(-5) = 25$ et $f(-3) = 81$.

Donc l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution dans $[-5, -3]$.

■ Sur l'intervalle $[-3, 5]$, on constate que :

• f est dérivable sur $[-3, 5]$;

• f est strictement décroissante sur $[-3, 5]$;

• 50 est compris entre $f(5) = -175$ et $f(-3) = 81$.

Donc l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution dans $[-3, 5]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 50$ admet exactement deux solutions dans $[-5, 5]$.

On cherche alors une valeur approchée de la solution x_1 comprise entre -5 et -3. On procède par approximations successives.

x	-5	-4	-3
$f(x)$	25	68	81

Comme 50 est compris entre $f(-5)$ et $f(-4)$, x_1 est comprise entre -5 et -4.

x	-5	$-4,9$	$-4,8$	$-4,7$	$-4,6$	$-4,5$	$-4,4$	$-4,3$	$-4,2$	$-4,1$	-4
$f(x)$	25			41,4	46,2	50,6					

Conclusion : comme 50 est compris entre $f(-4{,}6)$ et $f(-4{,}5)$, x_1 est comprise entre $-4{,}6$ et $-4{,}5$, donc la valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de x_1 est $-4{,}6$ (toutes les cases du dernier tableau ne sont pas remplies car dès que l'on a trouvé deux valeurs de $f(x)$ qui encadrent 50 avec la précision voulue sur x, il devient inutile de poursuivre les calculs).

Un raisonnement similaire montre que la valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de l'autre solution de l'équation est $-1{,}3$.